O'ZBEKISTON OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

F. RAJABOV, S. MASHARIPOVA, R. MADRAHIMOV

OLIY MATEMATIKA

O'zbekiston Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi universitetlar va pedagogika institutlarining (kasbiy ta'lim va mehnat ta'limi yo'nalishi) talabalari uchun o'quv qo'llanma sifatida tavsiya etgan

TOSHKENT
«TURON-IQBOL»
2007

Maxsus muharrir — fizika-matematika fanlari doktori, professor *Sh. Norimov*

Taqrizchilar: *M. Madrimov* — Nizomiy nomli Toshkent Davlat pedagogika universiteti «Matematik tahlil» kafedrasining dotsenti, fizika-matematika fanlari nomzodi.
Sh. Qosimov — Urganch Davlat universiteti «Matematik fizika va amaliy matematika» kafedrasining dotsenti, fizika-matematika fanlari nomzodi.

Ushbu o'quv qo'llanma universitetlar va pedagogika institutlarining kasbiy ta'lim va mehnat ta'limi yo'nalishi bo'yicha oliy matematika fani dasturi asosida yozilgan bo'lib, unda analitik geometriya va chiziqli algebra, matematik tahlil, bir o'zgaruvchili funksiyalarning differensial va integral hisobi, ikki o'zgaruvchili funksiyalar, differensial tenglamalar, qatorlar, karrali integrallar, ehtimollar nazariyasi elementlari bayon etilgan. Nazariy materialni mustahkamlashga doir yetarlicha misol va masalalar berilgan.

Qo'llanma kasbiy ta'lim yo'nalishlaridagi talabalar uchun mo'ljallangan. Undan, shuningdek, oliy o'quv yurtlarining boshqa mutaxassisliklar talabalari ham foydalanishlari mumkin.

$$R\,\frac{1602010000-45}{M361(04)-2007}\,2007$$

ISBN 978-9943-14-021-9

SO‘ZBOSHI

Respublikada «Ta’lim to‘g‘risida»gi, «Kadrlar tayyorlash milliy dasturi» haqidagi qonunlarni isloh qilish yetuk kadrlar tayyorlashda oliy o‘quv yurtlari oldiga ham bir qator vazifalar qo‘ymoqda. Jumladan, talabalar foydalanayotgan o‘quv adabiyotlarini qaytadan ko‘rib chiqishni taqozo etmoqda. Shu nuqtayi nazardan qarab kasb ta’limi yo‘nalishidagi talabalar uchun oliy matematika fanidan o‘quv qo‘llanma yozishga ehtiyoj tug‘ildi.

Kasb ta’limi yo‘nalishidagi talabalarning kasb egallashida o‘rganadigan dastlabki fanlaridan biri oliy matematika fani hisoblanadi.

Oliy matematika fani talabalarni faqat matematikadan ma’lumotlar majmuasi bilan tanishtirib qolmasdan, balki talabalarni mantiqiy fikrlash, matematik usullarni amaliy masalalarni yechishga tatbiq qilish, shuningdek, kasbga xos masalalarning matematik modellarini qurish va shunga asosan xulosalar chiqarishni ko‘zda tutadi.

O‘quv qo‘llanmaning texnika oliy o‘quv yurtlari uchun yozilgan o‘quv qo‘llanma, darsliklardan farqi uning yozilishida, fanning o‘qitilishi uchun o‘quv rejasida o‘quv soatlarning kamligini hisobga olinishida, bayon qilinishida, sodda berilishida hamda mavzularning misol va masalalar bilan, o‘z-o‘zini tekshirish savollari bilan ta’minlanganligidadir. Shuningdek, ayrim mavzular qisqa, ba’zi bir teoremalar isbotsiz keltirilgan.

O‘quv qo‘llanma universitet va pedagogika institutlarining kasbiy ta’lim mutaxassisligi yo‘nalishi uchun «Oliy matematika» fani dasturiga asosan yozilgan bo‘lib, unda analitik geometriya va chiziqli algebra, matematik tahlil, bir o‘zgaruvchili funksiyalarning differensial va integral hisobi, ikki o‘zgaruvchili funksiyalar, differensial tenglamalar, qatorlar, karrali integrallar, ehtimollar nazariyasi elementlari bayon etilgan.

Qo‘llanmaga mualliflarning Al-Xorazmiy nomli Urganch Davlat universitetining kasbiy ta’lim guruhlarida ko‘p yillar davomida o‘qigan ma'ruza va amaliy mashg'ulotlar materiallari asos qilib olindi. Shuningdek, shu sohaga tegishli mavjud o'zbek va rus tilidagi adabiyotlardan keng foydalanildi. Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati kitob oxirida keltirilgan.

Mualliflar qo'lyozmani o'qib, o'z fikr-mulohazalarini bildirgan fizika-matematika fakulteti dekani, fizika-matematika fanlari doktori, professor O. Hasanov, fizika-matematika fanlari doktori, professor Sh. Norimov, dotsentlardan Sh. Qosimov, R. Karimov, Nizomiy nomli Toshkent Davlat pedagogika universiteti dotsenti M. Madrimovlarga o'zlarining chuqur minnatdorchliklarini bildiradilar. Mualliflar qo'llanma haqida bildirilgan fikr va mulohazalarni minnatdorchilik bilan qabul qiladilar.

Mualliflar

1-bob. CHIZIQLI VA VEKTORLI ALGEBRA ELEMENTLARI

1.1. CHIZIQLI TENGLAMA, CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASI

$x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchili chiziqli tenglama deb ushbu

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... a_nx_n = C \qquad (1)$$

ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi, bu yerda $a_1, a_2, ..., a_n$ sonlar tenglamaning koeffitsiyentlari — o'zgarmas haqiqiy sonlardir. Ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = C_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = C_2, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = C_n \end{cases} \qquad (2)$$

ko'rinishdagi sistemaga esa n o'zgaruvchili n ta chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi.

$n = 1,3$ bo'lgan hollar uchun biz bu sistemaning yechimlarini topishni o'rta maktab kursidan bilamiz. Sistemani yechishning ikki usuli bor: o'rniga qo'yish va noma'lumlarni yo'qotish usullari.

1.1.1. IKKI NOMA'LUMLI CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASI. IKKINCHI TARTIBLI DETERMINANT

Ikki va uch noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasini yechish orqali ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar tushunchasiga kelamiz.

Ikkinchi tartibli determinant tushunchasiga ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglama sistemasini yechish orqali kelinadi. Aytaylik, ushbu

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \qquad (1)$$

chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin, bunda noma'lumlar oldidagi koeffitsiyentlardan kamida bittasi noldan farqli bo'lsin. (1)

sistema tenglamalaridan birinchisining har ikkala qismini b_2 ga, ikkinchisini esa $-b_1$ ga ko'paytirib, ularni hadma-had qo'shib, quyidagini topamiz:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\cdot x = c_1b_2 - c_2b_1.$$

Shundan keyin birinchi tenglamaning har ikkala qismini $-a_2$ ga, ikkinchi tenglamaning har ikkala qismini esa a_1 ga ko'paytirib va hadma-had qo'shib,

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\cdot y = c_2a_1 - c_1a_2$$

ni topamiz.

Agar $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ bo'lsa, (1) sistemaning yechimlari mavjud bo'lib, bu yechim quyidagicha topiladi:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \qquad y = \frac{c_2a_1 - c_1a_2}{b_2a_1 - b_1a_2}. \tag{2}$$

$a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ bo'lgan hol keyinroq alohida qaraladi. (1) sistemaning x va y o'zgaruvchilari oldidagi koeffitsiyentlaridan ushbu

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

jadvalni tuzamiz. Odatda bunday jadval *matritsa* deb ataladi.

Bunday ko'rinishdagi ifodalar matematikaning turli sohalarida ko'p uchrab turadi. Shuning uchun ular uchun maxsus belgilash va nomlar kiritish maqsadga muvofiqdir.

$\Delta = a_1b_2 - a_2b_1$ son (3) matritsaning *determinanti* deyiladi va u quyidagicha belgilanadi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{yoki} \quad \Delta = \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

a_1, b_1, a_2, b_2 sonlar (4) determinantning *elementlari* deyiladi. Bu determinantning ikkita satri va ikkita ustuni bor: a_1, a_2 sonlar birinchi ustunni, b_1, b_2 lar ikkinchi ustunni tashkil qiladi.

Xuddi shunday, birinchi satr elementlari: a_1, b_1, ikkinchi satr elementlari a_2, b_2 dan iboratdir.

a_1 va b_2 elementlar *bosh diagonal* elementlari, a_2 va b_1 elementlar *yordamchi diagonal* elementlari deyiladi.

Shunday qilib, ikkinchi tartibli determinantni hisoblash uchun bosh diagonalda turgan elementlar ko‘paytmasidan yordamchi diagonalda turgan elementlar ko‘paytmasini ayirish kerak, ya’ni

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

M i s o l. Quyidagi determinantlarni hisoblang:

$$1)\ \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}; \qquad 2)\ \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{vmatrix}.$$

Y e c h i s h. Ikkinchi tartibli determinantni hisoblashning yuqoridagi qoidasiga ko‘ra topamiz:

$$1)\ \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot(-2) - 1\cdot(-5) = -6 + 5 = -1;$$

$$2)\ \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & +\cos\alpha \end{vmatrix} = \cos\alpha\cdot\cos\alpha - \sin\alpha(-\sin\alpha) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

1.1.2. UCHINCHI TARTIBLI DETERMINANT

Ushbu

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin. Xuddi ikkita chiziqli tenglamalar sistemasidagi ikkinchi tartibli determinant tushunchasiga o‘xshash, bu yerda uchinchi tartibli determinant tushunchasini kiritamiz. Bu sistema koeffitsiyentlaridan tuzilgan uchinchi tartibli kvadrat matritsa berilgan bo‘lsin:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

(1) matritsaning uchinchi tartibli determinanti deb

$$\Delta = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 \qquad (2)$$

songa aytiladi. Ikkinchi tartibli determinant bo'lgan holdagi simvolikadan foydalansak, bu determinant tubandagicha belgilanadi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

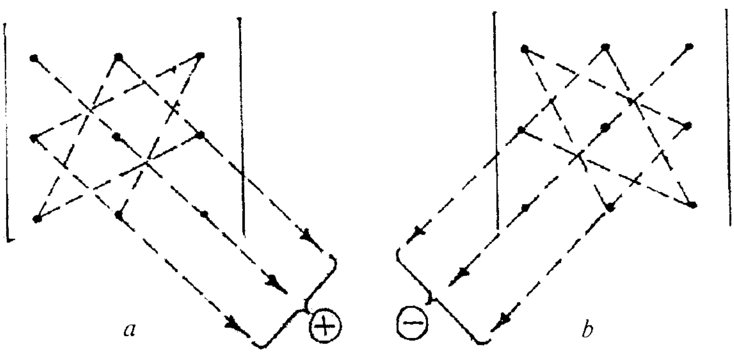
(2) dagi har qaysi ko'paytma determinantning hadlari deyiladi. Hadlar oldidagi ishoralarni esda saqlash qiyin emas. Agar biz (2) ga kiruvchi musbat hadlardagi uchta element ko'paytmasini tashkil qiluvchi elementlarni punktir chiziqlar bilan tutashtirsak, u holda esda saqlanib qoluvchi sxema hosil bo'ladi (1-*a* chizma).

Xuddi shunday manfiy ishoralar bilan (2) ga kiruvchi ko'paytmalar uchun ham sxemaga ega bo'lamiz (1-*b* chizma).

Qulaylik uchun determinantning elementlarini ikkita indeksli bitta harf bilan belgilash qabul qilingan bo'lib, bu indekslar element turgan satr va ustunlarning nomerlarini: birinchi indeks har doim satr nomerini, ikkinchi indeks esa ustun nomerini ko'rsatadi.

Masalan, a_{32} hadning indeksi uchinchi satrning ikkinchi ustuni elementi ekanini bildiradi. Bu belgilashlardan foydalanib, uchinchi tartibli determinantni quyidagicha yozish mumkin:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & c_{13} \\ a_{21} & b_{22} & c_{23} \\ a_{31} & b_{32} & c_{33} \end{vmatrix}.$$



1-chizma.

M i s o l. Quyidagi uchinchi tartibli determinantlarni hisoblang:

$$1)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix};\qquad 2)\ \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}.$$

Y e c h i s h. Yuqoridagi sxema va (2) formulaga ko'ra topamiz:

$$1)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot5+2\cdot(-1)\cdot2+3\cdot0\cdot4-2\cdot1\cdot3-1\cdot4\cdot(-1)-$$
$$-5\cdot2\cdot0=-1;$$

$$2)\ \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix} = a\cdot a\cdot a+1\cdot1\cdot a+a\cdot(-1)\cdot(-1)-a\cdot a\cdot a+$$
$$+1\cdot1\cdot a+1\cdot1\cdot a=4a.$$

1.1.3. DETERMINANTNI BERILGAN USTUNI YOKI SATRI ELEMENTLARI BO'YICHA YOYISH

n ta satr va n ta ustundan iborat ushbu kvadrat jadval berilgan bo'lsin:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Bu jadvalga n-tartibli *kvadrat matritsa* deyiladi. i-satr va j-ustun kesishgan joyda turgan elementni a_{ij} bilan belgilaymiz. Biz determinantni berilgan ustuni yoki satri elementlari bo'yicha yoyishda soddalik uchun $i,\ j = 1,\ 2,\ 3$ qiymatlar bilan chegaralanamiz. Boshqacha qilib aytganda, uchinchi tartibli kvadrat matritsa bilan shug'ullanamiz.

Determinant elementining algebraik to'ldiruvchisi tushunchasini kiritamiz. Ushbu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & c_{13} \\ a_{21} & b_{22} & c_{23} \\ a_{31} & b_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \tag{1}$$

determinantning a_{ik} elementini olaylik.

Ushbu

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot \Delta_{ik} \qquad (2)$$

son a_{ik} elementning *algebraik to'ldiruvchisi* deyiladi. Bu yerda Δ_{ik} — ikkinchi tartibli determinant.

U berilgan determinantdan i-satr va k-ustun elementlarini o'chirish orqali (o'chirilmay qolgan elementlardan) hosil bo'ladi. Δ_{ik} determinant a_{ik} elementning *minori* deyiladi. Aytilganga ko'ra a_{22} elementning algebraik to'ldiruvchisi quyidagidan iborat bo'ladi:

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \text{minori } \Delta_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Xuddi shunday a_{21} ning algebraik to'ldiruvchisi:

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Determinantni berilgan satri yoki ustuni elementlari bo'yicha yoyishdan foydalanib, ularni hisoblash ishini osonlashtirish mumkin. Quyidagi tasdiqni isbotsiz keltiramiz.

Teorema. *Determinant istalgan satri yoki ustuni elementlari bilan shu elementlar algebraik to'ldiruvchilari ko'paytmalarining yig'indisiga teng:*

$$\Delta = a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{32}(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{33}A_{33}.$$

Teorema yuqori tartibli determinantlar uchun ham o'rinli ekanini qayd qilib o'tamiz.

M i s o l. Quyidagi 3-tartibli determinantni 1-satri elementlari bo'yicha yoyib hisoblang:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Y e c h i s h. $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & -5 & 2\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -5 & 2\end{vmatrix}+2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}+$

$+(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & -5\end{vmatrix}=(-2+5)-2(4-3)+(-10+3)=$

$=3-2-7=-6.$

1.1.4. DETERMINANTNING XOSSALARI

1. *Determinantning hamma ustunlarini uning mos satrlari bilan (yoki aksincha) o'rnini almashtirishdan determinantning qiymati o'zgarmaydi, ya'ni*

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

I s b o t. Δ — berilgan determinant, Δ^* esa Δ dan uning satrlarini mos ustunlar bilan almashtirishdan hosil bo'lgan determinant bo'lsin. Δ ni birinchi satr elementlari bo'yicha yoyib chiqamiz:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}.$$

Endi Δ^* ni birinchi ustun elementlari bo'yicha yoyib chiqamiz:

$$\Delta^*=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}.$$

Demak, $\Delta=\Delta^*$.

2. *Determinantning istalgan ikkita satrining (yoki ikki ustunining) o'rinlari almashtirilsa, determinantning faqat ishorasi o'zgaradi.*

Masalan, agar birinchi va uchinchi satrlarning o'rinlarini almashtirsak:

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_{31} & a_{32} & a_{33}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{11} & a_{12} & a_{13}\end{vmatrix}.$$

3. *Ikkita satri yoki ikkita ustuni bir xil bo'lgan determinantning qiymati nolga teng.*

4. *Biror satr (yoki ustun) elementlarining umumiy ko'paytuvchisini determinant belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.*

I s b o t. Aytaylik, determinantning ikkinchi satr elementlari umumiy ko'paytuvchiga ega bo'lsin:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Bu deteminantni ikkinchi satr elementlari bo'yicha yoyamiz:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -ka_{21}A_{21} + ka_{22}A_{22} + ka_{23}A_{23} = k\Delta .$$

5. *Agar determinant biror i-satr (ustuni)ning har bir elementi ikkita qo'shiluvchining yig'indisidan iborat, ya'ni* $a_{ik} = b_k + c_k\,(k = \overline{1,n})$ *bo'lsa, u holda berilgan determinant shunday ikkita determinantning yig'indisiga teng bo'ladiki, bu determinantlarning i-satridan boshqa satrlari dastlabki determinantnikidek bo'ladi, ularning biridagi i-satr elementlari* b_k *elementlaridan, ikkinchisi esa* c_k *elementlardan iborat bo'ladi.*

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_1+m_1 & a_2+m_2 & a_3+m_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

6. *Determinantning biror ustun (satr) elementlariga boshqa ustunning (satrning) bir xil songa ko'paytirilgan mos elementlarini qo'shishdan determinantning qiymati o'zgarmaydi:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+k\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

7. *Determinantning biror ustuni (satri) elementlarining boshqa ustuni satri elementlari algebraik to'ldiruvchilari bilan ko'paytmasining yig'indisi nolga teng.*

Bayon qilingan xossalar yuqori tartibli determinantlar uchun ham o'rinli.

1.1.5. DETERMINANTLARNI IKKI VA UCH NOMA'LUMLI CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASINI TEKSHIRISHGA TATBIQI. KRAMER FORMULASI

Ushbu

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \qquad (1)$$

tenglamalar sistemasini analitik usulda tekshirishga o'tamiz, bunda (1) sistema yechimga ega deb faraz qilamiz. Yuqorida aniqlanganlardan foydalanib, quyidagilarni yozish mumkin:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}; \quad c_1b_2 - c_2b_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}; \quad a_1c_2 - a_2c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Ushbu

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \qquad (2)$$

belgilashlarini kiritamiz,
bu yerda: Δ — (1) sistemaning asosiy determinanti deyiladi, Δ_x determinant esa Δ ning birinchi ustun elementlarini ozod hadlar ustuni bilan almashtirish orqali, Δ_y esa Δ ning ikkinchi ustun elementlarini ozod hadlar ustuni bilan almashtirish orqali hosil qilingan.

1. Avval $\Delta \neq 0$ bo'lgan holni qaraymiz. Bu holda (1) sistema har doim yagona yechimga ega.

2. $\Delta = 0$ bo'lsin, u holda yordamchi determinantlardan hech bo'lmaganda bittasi noldan farqli bo'lsa, (1) sistema bitta ham yechimga ega emas.

Shunday qilib, $\Delta = 0$ bo'lganda va Δ_x yoki Δ_y yordamchi determinantlardan kamida bittasi noldan farqli bo'lsa, (1) sistema yechimga ega emas.

Odatda, bunday holda berilgan sistemaning tenglamalari *birgalikda emas* deyiladi.

3. Nihoyat, $\Delta = 0$ va $\Delta_x = \Delta_y = 0$ bo'lsin. Bu holda birinchi tenglamaning koeffitsiyentlari ikkinchi tenglamaning koeffitsiyentlariga proporsional bo'ladi va (1) sistema *cheksiz ko'p yechimga ega* bo'ladi. Yuqorida aytilganlarni yakunlab, quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin: (1) sistema yagona yechimga ega bo'lishi uchun uning determinanti noldan farqli bo'lishi zarur va yetarli:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

$\Delta \neq 0$ bo'lganda (1) yagona yechimi quyidagicha topiladi:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Bu *Kramer formulalari* deyiladi.

Misol. Ushbu tenglamalar sistemasining barcha yechimlarini toping:

$$\begin{cases} x + 3y = 4, \\ 2x - y = 1. \end{cases}$$

Yechish. Sistemaning determinantlarini topamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -7; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7.$$

$\Delta \neq 0$ bo'lgani uchun, sistema yagona yechimga ega. Kramer formulalariga ko'ra:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1.$$

1.1.6. UCH NOMA'LUMLI UCHTA CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASI

Uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasini tekshirish bilan shug'ullanamiz. Chiziqli tenglamalarning ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = d_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = d_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = d_3 \end{cases} \tag{1}$$

sistemasi berilgan bo'lsin. Noma'lumlar oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan determinantni Δ bilan belgilaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \tag{2}$$

yordamchi determinantlarni tuzamiz:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & a_{12} & a_{13} \\ d_2 & a_{22} & a_{23} \\ d_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & d_1 & a_{13} \\ a_{21} & d_2 & a_{23} \\ a_{31} & d_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & d_3 \end{vmatrix}.$$

Berilgan sistema x, y, z yechimga ega bo‘lsa, bu yechimni topish uchun quyidagi formulalarga ega bo‘lamiz:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \tag{3}$$

Quyidagi hollar sodir bo‘lishi mumkin:

1. $\Delta \neq 0$, bu holda (3) formulalardan (1) sistema bitta yechimga ega ekani kelib chiqadi.

2. $\Delta = 0$ va Δ_x, Δ_y, Δ_z determinantlardan aqalli bittasi noldan farqli. Bu holda (1) sistema yechimga ega bo‘lmaydi.

3. $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, bu holda (1) sistema cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi.

1-misol. Ushbu uch noma’lumli uchta chiziqli tenglama sistemasini yeching:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 2, \\ 3x - y + 2z = -3, \\ x + y - 3z = 4. \end{cases}$$

Yechish. Berilgan sistemaning asosiy determinanti va yordamchi determinantlarini tuzamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 6 + 3 + 6 + 1 + 27 - 4 = 39 \neq 0,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 3 + 24 + 4 - 4 - 27 = 0,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 18 + 12 + 4 + 3 - 16 + 18 = 39,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -8+6-9+2+6-36=-39.$$

Demak, $\Delta \neq 0$ bo'lgani uchun sistema yagona yechimga ega. Bu yechim quyidagidir: $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{0}{39} = 0$; $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{39}{39} = 1$; $z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-39}{39} = -1$.

Javob: $(0,\ 1,\ -1)$.

2-misol. Ushbu sistemani yeching:

$$\begin{cases} x - 5y + 2z = 1, \\ 3x - 25y + 6z = 7, \\ 9x - 45y + 18z = -3. \end{cases}$$

Yechish. Bevosita hisoblash orqali $\Delta = \Delta_y = 0$; $\Delta_x \neq 0$; $\Delta_z \neq 0$ ekaniga ishonch hosil qilish oson. Bundan ko'rinadiki, sistema yechimga ega emas.

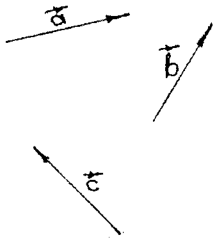
O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Ikki va uch noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasini yechish usullari to'g'risida aytib bering.
2. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlarni hisoblash formulalarini yozing.
3. Determinantning xossalarini aytib bering.
4. Determinant biror elementining algebraik to'ldiruvchisi va minori nima?
5. Determinantning biror satr yoki ustun elementlariga ko'ra yoyish qanday bajariladi va qanday maqsadda ishlatiladi?

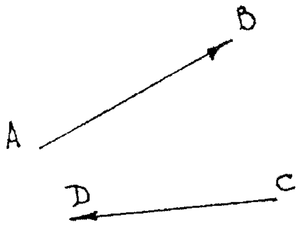
1.2. VEKTOR. VEKTORLAR USTIDA AMALLAR. NUQTANING VA VEKTORNING KOORDINATALARI

1.2.1. VEKTOR. NOL VEKTOR. VEKTOR UZUNLIGI, QIYMATI VA YO'NALISHI

Agar kesma oxirlarining tartibi e'tiborga olinsa, u yo'nalgan hisoblanadi. Agar oldin A nuqta, keyin B nuqta berilgan bo'lsa, u holda A nuqta $\overrightarrow{AB}$ yo'nalgan kesmaning boshi, B nuqta esa oxiri deyiladi. $\overrightarrow{AB}$ yo'nalgan kesma ustiga chiziq qo'yish bilan belgilanadi. Oddiy kesmaning uchlari teng huquqli bo'lib, ular tartibining ahamiyati yo'q. Yo'nalgan kesmada esa boshi oxirining o'rinlari almashtirilishi bilan ularning yo'nalishi o'zgaradi. Yo'nalgan $\overrightarrow{AB}$



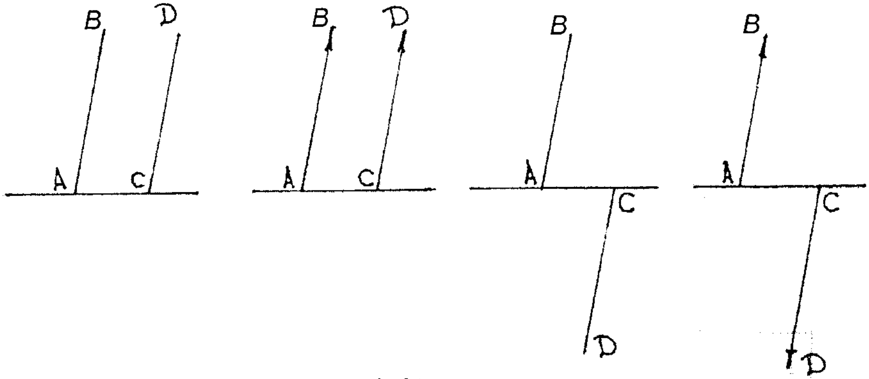
2-chizma.



3-chizma.

kesmaning uzunligi deb $[AB]$ kesmaning uzunligini aytiladi va $|\overrightarrow{AB}|$ bilan belgilanadi. Yo'naltirilgan kesma *vektor* deyiladi. Vektorlarni belgilashda biz ustiga strelka qo'yilgan kichik lotin harflaridan foydalanamiz: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ... (2-chizma). Ba'zan vektorlarni kesma oxirlarini ko'rsatuvchi o'sha harflar bilan ham belgilanadi. Masalan, vektorni 3-chizmada ko'rsatilgandek, $\overrightarrow{AB}$ ko'rinishda belgilash mumkin. A nuqta vektorning *boshi*, B nuqta vektorning *oxiri* deyiladi. Agar $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{CD}$ yo'nalgan kesmalar bir xil (qarama-qarshi) yo'nalishli bo'lsa, $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{CD}$ vektorlar bir xil (qarama-qarshi) yo'nalishli vektorlar deyiladi (4-chizma).

$\vec{a}$ vektorning *absolut qiymati* (uzunligi) yoki *moduli* deb shu vektorni tasvirlovchi kesma uzunligiga aytiladi. $\vec{a}$ vektorning absolut qiymati $|\vec{a}|$ bilan, $\overrightarrow{AB}$ vektorning absolut qiymati esa $|\overrightarrow{AB}|$ bilan belgilanadi. Moduli birga teng bo'lgan vektor *birlik vektor* deyiladi. Vektorning boshi uning oxiri bilan ustma-ust tushishi mumkin.



4-chizma.

Bunday vektorlar *nol vektor* deb ataladi. Nol vektor ustiga strelka qo'yilgan nol $(\vec{0})$ bilan belgilanadi. Nol vektorning yo'nalishi haqida so'z yuritilmaydi — u aniqlanmagan. Nol vektorning moduli nolga teng deb hisoblanadi. Noldan farqli ikkita vektor bir to'g'ri chiziqda yoki parallel to'g'ri chiziqlarda yotsa, bunday vektorlar *kollinear* vektorlar deyiladi. $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlarning kollinearligi $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ko'rinishida belgilanadi. Uzunliklari teng, kollinear va bir xil yo'nalishli ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar teng vektorlar deyiladi va $\vec{a} = \vec{b}$ ko'rinishida belgilanadi. Bir tekislikka parallel bo'lgan yoki shu tekislikda yotuvchi vektorlar *komplanar* vektorlar deyiladi.

1.2.2. VEKTORLAR USTIDA AMALLAR

Vektorlarni qo'shish

Ta'rif. Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorning *yig'indisi* deb istalgan A nuqtadan $\vec{a}$ vektorni qo'yib, uning oxiri B ga $\vec{b}$ vektorni qo'yganda boshi $\vec{a}$ vektorning boshi A da, oxiri $\vec{b}$ vektorning oxiri C da bo'lgan $\overrightarrow{AC}$ vektorga aytiladi (5-chizma).

$\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlarning yig'indisi $\vec{a} + \vec{b}$ bilan belgilanadi. Vektorni qo'shish ta'rifidan istalgan A, B va C uch nuqta uchun

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \tag{1}$$

tenglik o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. (1) tenglik vektorlarni qo'shishning *uchburchak qoidasi* deyiladi. Ikki kollinear vektorni qo'shish ham shu qoida bo'yicha bajariladi.

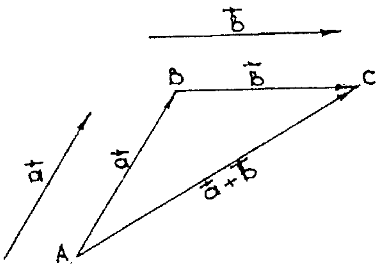
Vektorlarni qo'shish amali quyidagi xossalarga ega:

1) qo'shishning gruppalash (assotsiativlik) xossasi. Har qanday $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlar uchun $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ munosabat o'rinli.

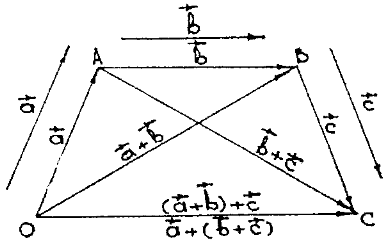
Isbot. Vektorlarni qo'shishning uchburchak qoidasidan (6-chizma):

$$\vec{a}+\vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB},$$

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC},$$



5-chizma.



6-chizma.

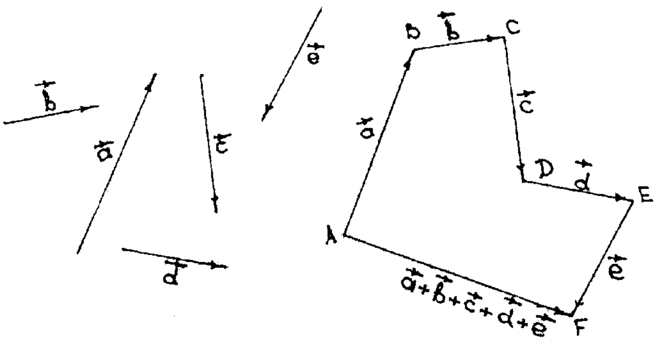
$$\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC},$$

bundan $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ ekani kelib chiqadi.

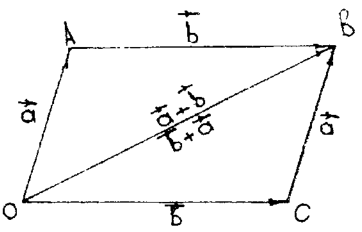
Qo‘shiluvchi vektorlarning soni ikkitadan ortiq bo‘lganda, ularni qo‘shish quyidagicha bajariladi. Berilgan $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ... vektorlarning yig‘indisini hosil qilish uchun $\vec{a}$ vektorning oxiriga $\vec{b}$ vektorning boshini qo‘yish, keyin $\vec{b}$ vektorning oxiriga $\vec{c}$ vektorning boshini qo‘yish va h. k., bu ishni oxirgi vektor ustida bajarilguncha davom ettirish kerak. U vektor $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\ldots+l$ yig‘indisi vektor boshi $\vec{a}$ vektorning boshidan, oxiri esa l vektorning oxiridan iborat vektor bo‘ladi. Masalan, 7-chizmadagi $\overrightarrow{AF}$ vektor berilgan $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ vektorlarni qo‘shishdan hosil bo‘lgan vektordir.

2) q o ‘ s h i s h n i n g o ‘ r i n a l m a s h t i r i s h (k o m m u t a t i v l i k) x o s s a s i. Har qanday ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektor uchun $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ tenglik o‘rinlidir.

I s b o t. $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ va $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$ bo‘lsin. Ikki hol bo‘lishi mumkin:



7-chizma.



8-chizma.

a) $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlar kollinear emas. Bu holda O, A, B nuqtalar bitta to'g'ri chiziqda yotmaydi (8-chizma). OAB uchburchakni $OABC$ parallelogrammga to'ldirsak, vektorlarni qo'shishning uchburchak qoidasiga ko'ra:

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB},$$
$$\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB},$$

bu ikki tenglikdan esa $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ kelib chiqadi.

b) $\vec{a}\,||\,\vec{b}$ bo'lsin. Bu holda O, A, B nuqtalar bitta d to'g'ri chiziqda yotadi. d to'g'ri chiziqda yotmaydigan C nuqta olaylik, u holda

$$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}; \tag{2}$$

a) holga ko'ra $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{OB}$. Lekin $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$ bo'lgani uchun:

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OA}. \tag{3}$$

Qarama-qarshi vektorlar yig'indisi $\vec{0}$ ga teng bo'lgani uchun $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$, ikkinchi tomondan,

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}. \tag{4}$$

(3) va (4) tengliklardan $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ tenglikka ega bo'lamiz.

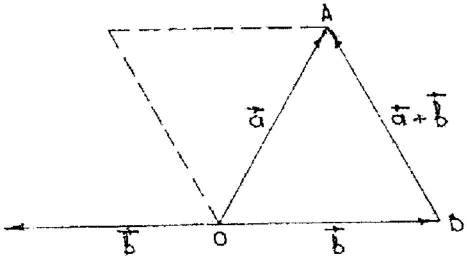
3) har qanday $\vec{a}$ vektorga nol vektor qo'shilsa, $\vec{a}$ vektor hosil bo'ladi, ya'ni $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

Uchburchak qoidasiga ko'ra istalgan $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ vektor uchun $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{OA}$ tenglik yoki $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ tenglik o'rinli.

4) har qanday $\vec{a}$ vektor uchun shunday $\vec{a}'$ mavjudki, uning uchun:

$$\vec{a}+\vec{a}'=0. \tag{5}$$

Isbot. $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ bo'lsin. Vektorlarni qo'shishning uchburchak qoidasiga ko'ra $\overrightarrow{OO}=\vec{0}$, bundan $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$. (5) tenglikni qanoatlanti-



9-chizma.

ruvchi $\vec{a}'$ vektor $\vec{a}$ vektorga qarama-qarshi vektor deyiladi va $-\vec{a}$ bilan belgilanadi.

Vektorlarni ayirish

Ta'rif. $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlarning *ayirmasi* deb $\vec{a}$ vektor bilan $\vec{b}$ vektorga qarama-qarshi $-\vec{b}$ vektorning yig'indisiga aytiladi.

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ ayirma vektorni yasash uchun $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$ vektorni yasash kerak ekan. Agar $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlar bitta O nuqtaga qo'yilgan (9-chizma) hamda $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ va $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ deb belgilangan bo'lsa, u holda

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA}.$$

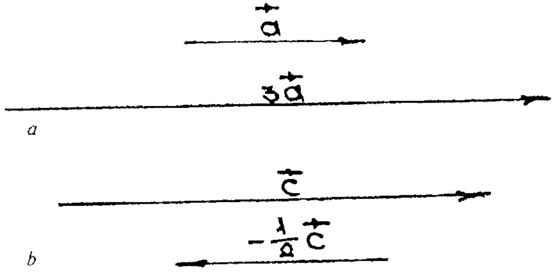
Bu holda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning ayirmasini topish uchun boshi $\vec{B}$ nuqtada oxiri $\vec{A}$ nuqtada bo'lgan $\overrightarrow{BA}$ vektorni yasash yetarli bo'ladi.

Vektorni songa ko'paytirish

$\vec{a} \neq 0$ vektor va α son berilgan bo'lsin, bu yerda $\alpha \in$R.

Ta'rif. $\vec{a}$ vektorning *α songa ko'paytmasi* deb shunday $\vec{b}$ vektorga aytiladiki, $\alpha > 0$ bo'lganda $\vec{b}$ ning yo'nalishi $\vec{a}$ ning yo'nalishi bilan bir xil, $\alpha < 0$ da $\vec{b}$ ning yo'nalishiga teskari bo'lib, $\vec{b}$ vektorning uzunligi esa $\vec{a}$ vektorning uzunligi bilan α son modulining ko'paytmasiga teng.

$\vec{a}$ ning α songa ko'paytmasi $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ shaklida belgilanadi. Bu ta'rifdan bevosita quyidagi xulosalar kelib chiqadi:



10-chizma.

a) ixtiyoriy $\vec{a}$ vektor uchun: $0 \cdot \vec{a} = 0$;

b) ixtiyoriy $\alpha \in R$ con uchun: $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$;

d) ixtiyoriy $\vec{a}$ vektor uchun: $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$; $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$;

e) $\vec{a}$ va $\alpha\vec{a}$ vektorlar o‘zaro kollineardir.

10-*a* chizmada $\vec{a}$ vektor 3 soniga ko‘paytirilgan: $\vec{b} = 3\vec{a}$; 10-*b* chizmada $\vec{c}$ vektor $-\frac{1}{2}$ soniga ko‘paytirilgan: $\vec{b} = -\frac{1}{2}$. Biror $\vec{a} \neq 0$ vektorni o‘zining uzunligiga teskari $\frac{1}{|\vec{a}|}$ songa ko‘paytirilsa, shu vektor yo‘nalishidagi *birlik vektor (ort)* hosil bo‘ladi, ya’ni $\frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \vec{a}_0 (|\vec{a}_0| = 1)$.

Teorema. *Agar $\vec{a} \,||\, \vec{b}$ $(\vec{a} \neq 0)$ bo‘lsa, u holda shunday α son mavjudki,*

$$\vec{b} = \alpha\vec{a}. \tag{6}$$

I s b o t. $\vec{a} \,||\, \vec{b}$ bo‘lgani uchun quyidagi uch hol bo‘lishi mumkin:

1) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ bo‘lsa, $\frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \frac{1}{|\vec{b}|} \cdot \vec{b}$ bo‘lib, bundan $\vec{b} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$, bu holda $\alpha = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ bo‘ladi;

2) $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ bo‘lsa, $\frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = -\frac{1}{|\vec{b}|} \cdot \vec{b}$ bo‘lib, bundan $\vec{b} = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$, bu holda $\alpha = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ bo‘ladi;

3) $\vec{b} = 0$ bo‘lganda $\vec{b} = 0 \cdot \vec{a}$, bundan $\alpha = 0$. Demak, vektorni songa ko‘paytirish ta’rifidan va bu teoremadan quyidagi xulosani chiqarish mumkin:

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{b}=\alpha\,\vec{a},\ (\alpha\in R).$$

Shunday qilib, (6) munosabat $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlar kollinearligining zaruriy va yetarli shartidir.

Vektorni songa ko'paytirish quyidagi xossalarga ega:

a) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$, $(-1)\cdot\vec{a}=-\vec{a}$;

b) $\alpha(\beta\cdot\vec{a})=(\alpha\cdot\beta)\vec{a}$ (gruppalash qonuni);

d) $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\cdot\vec{a}+\alpha\cdot\vec{b}$ (vektorlarni qo'shishga nisbatan taqsimot qonuni);

e) $(\alpha+\beta)\cdot\vec{a}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{a}$ (skalyarni qo'shishga nisbatan taqsimot qonuni).

Ikkinchi xossani, ya'ni $\alpha(\beta\cdot\vec{a})=(\alpha\cdot\beta)\vec{a}$ tenglikning o'rinli ekanini ko'rsatish bilan cheklanamiz.

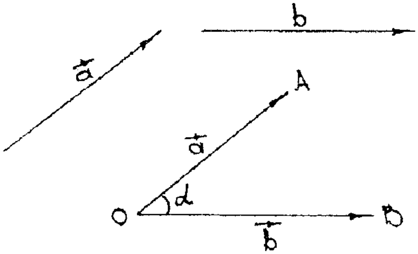
Isbot. Ma'lumki, $\alpha(\beta\cdot\vec{a})$ va $(\alpha\cdot\beta)\vec{a}$ vektorlar bir xil $|\alpha|\cdot|\beta|\cdot|\vec{a}|$ uzunlikka ega. Vektorni songa ko'paytirish amali ta'rifiga ko'ra agar $\alpha\cdot\beta>0$ bo'lsa, $\alpha(\beta\cdot\vec{a})$ va $(\alpha\cdot\beta)\vec{a}$ vektorlar bir xil yo'nalgan, agar $\alpha\cdot\beta<0$ bo'lsa, vektorlar $\vec{a}$ ga qarama-qarshi yo'nalgan bo'ladi. Shunday qilib, agar $\alpha=0$, $\beta\neq0$, $\vec{a}\neq0$ bo'lsa, $\alpha(\beta\cdot\vec{a})$ va $(\alpha\cdot\beta)\vec{a}$ ga ega bo'lamiz. Agar $\alpha=0, \beta=0$, $\vec{a}=0$ bo'lsa, u holda $\alpha(\beta\cdot0)=0$ va $(\alpha\cdot\beta)\vec{a}=0$ bo'ladi.

Agar $\vec{a}$ vektorni $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$ vektorlar orqali $\vec{a}=\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\ldots+\lambda_n\vec{a}_n$ ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa, $\vec{a}$ vektor $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$ vektorlarning *chiziqli kombinatsiyasidan* iborat deyiladi, bunda λ_1, λ_2, ..., λ_n — haqiqiy sonlar. Masalan, $\vec{a}=\vec{a}_1+3\vec{a}_2+\frac{1}{3}\vec{a}_3$ vektor $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat.

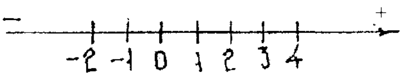
Biror vektor boshqa bir qancha vektorlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lsa, u vektor qolgan vektorlar bo'yicha *yoyilgan* deyiladi.

1.2.3. VEKTORLAR ORASIDAGI BURCHAK. VEKTORNING O'QDAGI PROYEKSIYASI

Ikki vektor hamda vektor va o'q orasidagi burchak tushunchalarini kiritamiz. Bizga $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar berilgan bo'lsin. Bu vektorlarning



11-chizma.



12-chizma.

boshlarini biror umumiy O nuqtaga joylashtiramiz, boshqacha aytganda, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ va $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ vektorlarni yasaymiz (11-chizma). U holda AOB uchburchakning ichki AOB burchagi (a vektorni b vektor bilan ustma-ust tushguncha aylantirish lozim bo'lgan ikki burchakning kichigi) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak deyiladi hamda $(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})$ ko'rinishida yoki $\alpha, \beta, \ldots$ harflardan biri orqali belgilanadi. Ta'rifga ko'ra, vektorlar orasidagi burchak $0°$ dan $180°$ gacha (mos ravishda 0 dan π gacha) oraliqda bo'ladi. Bundan ko'rinadiki, bir xil yo'nalishdagi kollinear vektorlar orasidagi burchak $0°$ ga, qarama-qarshi yo'nalishdagi vektorlar orasidagi burchak $180°$ ga teng bo'lar ekan. Agar vektorlar orasidagi burchak $90°$ ga teng bo'lsa, ular perpendikular yoki *ortogonal* vektorlar deyiladi va $\vec{a}\perp\vec{b}$ kabi belgilanadi.

Agar to'g'ri chiziqda sanoq boshi hisoblangan 0 nuqta, masshtab birligi va yo'nalish olingan bo'lsa, bu to'g'ri chiziq *o'q* deb ataladi. Odatda o'ng tomonga musbat, chap tomonga yo'nalish manfiy deb olinadi (12-chizma).

Aytaylik l o'q va birlik vektori $\vec{e}$ berilgan bo'lsin. Ixtiyoriy $\vec{a}\neq 0$ vektorning birlik vektori $|\vec{a}_0|$ tubandagicha aniqlanadi:

$$\vec{a}_0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|};\quad |\vec{a}_0|=\left|\frac{\vec{a}}{|a|}\right|=\left|\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}\right|=\frac{1}{|\vec{a}|}\cdot|\vec{a}|=1.$$

$\vec{a}\neq 0$ tesiklikdagi ixtiyoriy vektor bo'lsin, $\vec{a}$ vektor bilan l o'q orasidagi burchak deganda o'qning birlik vektori $\vec{e}$ bilan $\vec{a}$ vektor orasidagi burchak tushuniladi. $\vec{a}$ vektor l o'q bilan φ burchak tashkil qilsin (13-*a* chizma).

Ta'rif. Vektorning *l o'qidagi ortogonal proyeksiyasi* deb vektor uzunligini shu vektor bilan o'q orasidagi burchak kosinusiga ko'paytmasiga teng bo'lgan songa aytiladi.

$\vec{a}$ vektorning l o'qdagi proyeksiyasi $\text{np}_l\,\vec{a}$ ko'rinishida belgilanadi. Ta'rifga ko'ra:

$$\text{np}_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos\varphi. \qquad (1)$$

$\vec{a}$ vektorning bu o‘qdagi ortogonal proyeksiyasi quyidagicha aniqlanadi:

$$\overrightarrow{OA_1} = \text{np}_l\ \vec{a} = |\vec{a}|\ \cos \text{j},$$

bu yerda: $\varphi = (\vec{e},\ \vec{a})$, A_1 nuqta A nuqtaning l to‘g‘ri chiziqdagi proyeksiyasi.

Biz $\vec{a}$ va $\vec{e}$ vektorlar orasidagi φ burchak o‘tkir bo‘lgan holni ko‘rdik, burchak o‘tmas bo‘lgan holda ham a vektorning l o‘qdagi proyeksiyasi OA_1 kesmaning uzunligiga teng bo‘ladi (13-*b* chizma), ammo ishora minus bilan olinadi. Haqiqatan ham,

$$\text{np}_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos\varphi = |\vec{a}| \cos\angle BOA = |\vec{a}| \cos\angle A_1OA = -OA_1.$$

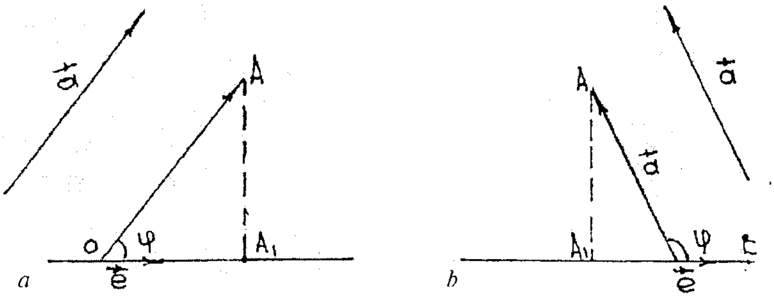
Agar $\vec{a}$ vektor l o‘qqa perpendikular bo‘lsa, u holda $\varphi = 90°$ bo‘lib, $\text{np}_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos 90° = 0$ bo‘ladi. Ixtiyoriy $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar uchun:

$$\text{np}_l(\vec{b} + \vec{c}) = \text{np}_l \vec{b} + \text{np}_l \vec{c} \ldots \qquad (*)$$

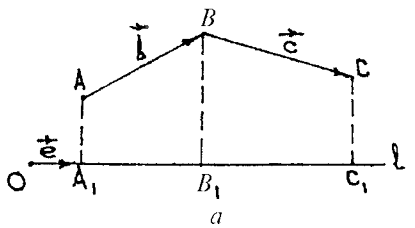
tenglik o‘rinli ekanligini ko‘rsatish mumkin.

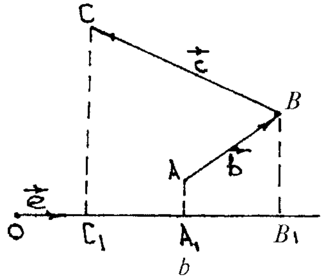
Haqiqatan ham, agar $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarning l o‘qdagi proyeksiyalari bir xil ishorali bo‘lsa (14-*a* chizma) quyidagi munosabat o‘rinli bo‘ladi:

$$\text{np}_l(\vec{b} + \vec{c}) = \text{np}_l \overrightarrow{AC} = -A_1C_1 = A_1B_1 + B_1C_1 = \text{np}_l \vec{b} + \text{np}_l \vec{c}.$$



13-chizma.





14-chizma.

Agar proyeksiyalarning ishoralari har xil bo‘lsa (14-*b* chizma), quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\text{np}_l(\vec{b}+\vec{c}) = \text{np}_l\,\overrightarrow{AC} = -A_1C_1 = A_1B_1 - B_1C_1 = \text{np}_l\vec{b} + \text{np}_l\vec{c}.$$

Ikkala holda ham (*) tenglik o‘rinli.

Bu xossani *n* ta vektorlar yig‘indisining proyeksiyasi uchun ham umumlashtirish mumkin, ya’ni bir nechta vektorlar yig‘indisining biror l o‘qdagi proyeksiyasi shu vektorning l o‘qdagi proyeksiyalarining yig‘indisiga teng.

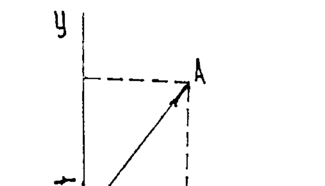
M i s o l. Uzunligi $|\vec{a}| = 5$ ga, l o‘q bilan hosil qilgan burchagi 60° ga teng bo‘lgan $\vec{a}$ vektorning l o‘qdagi proyeksiyasini hisoblang.

Y e c h i s h. (1) formulaga asosan:

$$\text{np}_l\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi = 5\cdot\cos 60^\circ = 5\cdot\frac{1}{2} = 2{,}5.$$

1.2.4. TO‘G‘RI BURCHAKLI DEKART KOORDINATALAR SISTEMASI. NUQTANING VA VEKTORNING KOORDINATALARI

Tekislikda koordinatalar sistemasini kiritish



15-chizma.

Tekislikda nuqta, chiziq, kesma, shuningdek, boshqa geometrik obyektlarning o‘rinlarini tasvirlash uchun to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasi kiritiladi. Buning uchun tekislikda biror 0 nuqtada kesishuvchi o‘zaro perpendikular ikkita o‘qni olamiz. Bu o‘qlarning har birida 0 nuqtadan boshlab kollinear bo‘lmagan $\vec{i}$, $\vec{j}$ vektorlarni ajratamiz (15-chizma).

1-ta'rif. Musbat yo'nalishlari mos ravishda $\vec{i}$, $\vec{j}$ vektorlar bilan aniqlanuvchi o'zaro perpendikular ikkita o'qdan tashkil topgan sistema tekislikda *to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi* deyiladi va $R=\{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ ko'rinishda belgilanadi. 0 (0) nuqta *koordinatalar boshi,* $\vec{i}$, $\vec{j}$ birlik vektorlar esa *koordinata vektorlari* deyiladi.

Ta'rifga asosan, $\vec{i}$, $\vec{j}$ vektorlar ortogonal va birlik vektorlardir: $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$, $\vec{i} \perp \vec{j}$. Musbat yo'nalishlari $\vec{i}$, $\vec{j}$ vektorlar bilan aniqlangan o'qlar mos ravishda *abssissalar* va *ordinatalar o'qlari* deb ataladi.

Tekislikda $R = \{0; \vec{i}; \vec{j}\}$ koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin. Shu tekislikning A nuqtasi uchun $\overrightarrow{OA}$ vektor A nuqtaning *radius-vektori* deyiladi. $\overrightarrow{OA}$ vektor uchun quyidagi munosabatni yozish mumkin:

$$\overrightarrow{OA} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}.$$

2-ta'rif. OA radius-vektorning x, y koordinatalari A nuqtaning R = $\{0; \vec{i}; \vec{j}\}$ koordinatalar sistemasida *koordinatalari* deyiladi va u $A(x; y)$ ko'rinishda belgilanadi. Bunda x A nuqtaning *abssissasi*, y esa A nuqtaning *ordinatasi* deyiladi.

Endi vektorning koordinatalarini qaraymiz.

3-ta'rif. Vektorning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari *vektorning koordinatalari* deb aytiladi.

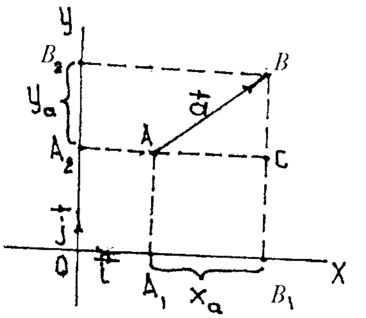
Vektorni Ox o'qidagi proyeksiyasi uning birinchi koordinatasi yoki x koordinatasi, Oy o'qidagi proyeksiyasi uning ikkinchi koordinatasi yoki y koordinatasi deyiladi.

Shunga ko'ra, $\vec{a}$ vektorning koordinatalarini x_a, y_a bilan belgilasak, u holda ta'rifga asosan:

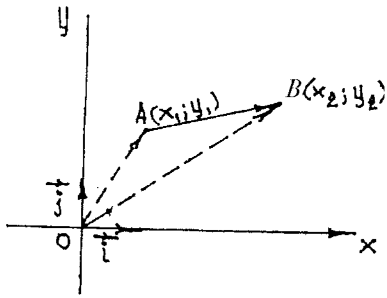
$$x_a = \text{np}_{Ox}\,\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{a} {}^\wedge \vec{i}),$$

$$y_a = \text{np}_{Oy}\,\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{a} {}^\wedge \vec{j}).$$

Aytaylik, tekislikda $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ vektor berilgan bo'lsin. A nuqtadan Ox o'qiga parallel, B nuqtadan Oy o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar



16-chizma.



17-chizma.

o'tkazamiz (16-chizma). Ularning kesishish nuqtasi C bo'lsin. U holda

$$\overrightarrow{AC} = x_a \cdot \vec{i}, \quad \overrightarrow{CB} = y_a \cdot \vec{j}$$

va

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = x_a \cdot \vec{i} + y_a \cdot \vec{j}$$

bo'ladi.

Bundan quyidagi xulosa kelib chiqadi: agar x_a, y_a lar $\vec{a}$ vektorining koordinatalari bo'lsa, a vektorni uning koordinatalari orqali tubandagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\vec{a} = x_a \cdot \vec{i} + y_a \cdot \vec{j}. \qquad (1)$$

(1) vektor tenglik ko'p hollarda $\vec{a} = \{x_a;\ y_a\}$ simvolik ko'rinishda yoziladi.

(1) tenglik tekislikdagi har qanday vektorni ikkita o'zaro perpendikular vektorlarga yoyib yozish mumkinligini bildiradi. Umuman olganda, tekislikdagi har qanday vektorni kollinear bo'lmagan ikkita vektorga yoyib yozish mumkin. Vektorning boshi va oxiri koordinatalari $R = \{0;\ \vec{i};\ \vec{j}\}$ ga nisbatan ma'lum bo'lsa, bu vektorning koordinatalarini topishni qaraylik. Aytaylik, $R = \{0;\ \vec{i};\ \vec{j}\}$ ga nisbatan $A(x_1;\ y_1)$; $B(x_2;\ y_2)$ bo'lsin (17-chizma). Bu holda $\overrightarrow{OA} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}$; $\overrightarrow{OB} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j}$;

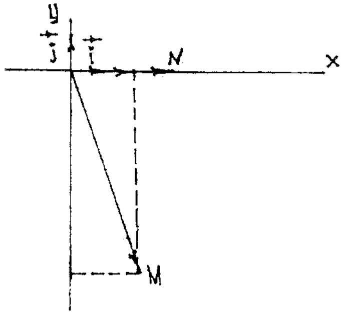
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA};$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\,\vec{i} + (y_2 - y_1)\,\vec{j}.$$

Bundan

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1\}, \qquad (2)$$

ya'ni vektorning koordinatalari shu vektor oxirining koordinatlaridan mos ravishda boshining koordinatlarini ayirish bilan hosil qilinadi.



18-chizma.

1-m i s o l. $R = \{0;\ \vec{i};\ \vec{j}\}$ da $M(1; -5)$, $N(3; 0)$ nuqtalarni yasang.

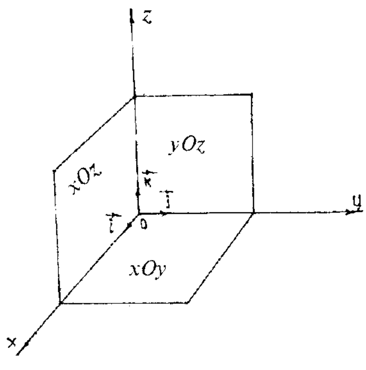
Y e c h i s h. $M(1; -5)$ nuqtani yasash uchun $\overrightarrow{OM} = 1\vec{i} - 5\vec{j}$ vektorni yasaymiz. Buning uchun O nuqtadan boshlab $\vec{i}$ ga kollinear $1\vec{i}$ va $\vec{j}$ ga kollinear $-5\vec{j}$ vektorni yasaymiz. So'ngra bu vektorlarning yig'indisini topsak, $\overrightarrow{OM}$ vektor hosil bo'ladi va undan izlanayotgan M nuqtani topamiz. Xuddi shunday, $N(3; 0)$ nuqtani yasash uchun $\overrightarrow{ON} = 3\vec{i}$ vektorni yasaymiz (18-chizma).

2-m i s o l. Agar $A(1; 2)$, $B(-2; 3)$ bo'lsa, $\overrightarrow{AB}$ vektorning koordinatalarini toping.

Y e c h i s h. Bu yerda $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $y_1 = -2$, $y_2 = 3$.
(2) formulaga ko'ra: $\overrightarrow{AB} = \{-2 - 1;\ 3 - 2\} = \{-3;\ 1\}$.

Fazoda koordinatalar sistemasini kiritish

Bitta O nuqta, kesishuvchi o'zaro perpendikular uchta Ox, Oy, Oz to'g'ri chiziqlarni olamiz (19-chizma). Bu to'g'ri chiziqlarning har bir jufti orqali tekislik o'tkazamiz. Ox va Oy to'g'ri chiziqlar orqali o'tuvchi tekislikni xOy tekislik deb ataymiz. Shunga o'xshash qolgan ikkita tekislikni mos ravishda xOz



19-chizma.

va yOz tekisliklari deymiz. Ox, Oy, Oz to'g'ri chiziqlar *koodinata o'qlari* (mos ravishda *abssissa, ordinata, applikata*), ularning kesishish nuqtasi *0 koordinata boshi,* xOy, yOz va xOz tekisliklar *koordinata tekisliklari* deyiladi. O nuqta har bir o'qni ikkita yarim to'g'ri chiziqqa ajratadi. Ulardan birini musbat, boshqasini manfiy deb kelishib olamiz. Bu usul bilan hosil qilingan $Oxyz$ sistemaga fazoda *to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi* deyiladi. Odatda Ox, Oy, Oz koordinata o'qlarining birlik vektorlari mos ravishda $\vec{i}$, $\vec{j}$ va $\vec{k}$ lar orqali belgilanadi. Fazodagi to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi $R = \{0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$ ko'rinishda ham belgilanadi. Fazodagi vektorning koordinatalari deb uning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalariga aytiladi. Vektorni Ox o'qdagi proyeksiyasi uning birinchi yoki x koordinatasi, Oy o'qdagi proyeksiyasi uning ikkinchi yoki y koordinatasi, Oz o'qdagi proyeksiyasi uchinchi yoki z koordinatasi deb aytiladi.

Aytaylik, fazoda o'zining x_a, y_a, z_a koordinatalari bilan $\vec{a}$ vektori berilgan bo'lsin. Tekislikda vektorni koordinatalariga o'xshash

$$\vec{a} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k} \tag{3}$$

tenglikning bajarilishini isbotlash mumkin. (3) tenglik fazodagi har qanday vektorni o'zaro perpendikular bo'lgan uchta vektorga yoyib yozish mumkinligini bildiradi.

Umuman olganda, fazodagi har qanday vektorni uchta o'zaro kollinear bo'lmagan vektorlarga yoyish mumkin. Vektorlarning koordinatalari berilganda vektorlarning yig'indisi, ayirmasini va vektorni songa ko'paytirishni ko'rib chiqamiz. Vektorlarni qo'shish (ayirish) va vektorni songa ko'paytirish xossasidan, agar $\vec{a}$ vektorning koordinatalari x_a, y_a, z_a, $\vec{b}$ vektorning koordinatalari x_b, y_b, z_b bo'lsa, u holda

$$\vec{a} \pm \vec{b} = x_a\vec{i} \pm y_a\vec{j} \pm z_a\vec{k} \pm x_b\vec{i} \pm y_b\vec{j} \pm z_b\vec{k} = (x_a \pm x_b)\,\vec{i} + \\ + (y_a \pm y_b)\,\vec{j} + (z_a \pm z_b)\,\vec{k}$$

ekanligi kelib chiqadi. Shunday qilib, $\vec{a} \pm \vec{b}$ vektor $(x_a \pm x_b)$; $(y_a \pm y_b)$; $(z_a \pm z_b)$ koordinatalarga ega bo'ladi, ya'ni

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \{x_a \pm x_b;\ y_a \pm y_b;\ z_a \pm z_b\}; \tag{4}$$

$\lambda \vec{a}$ vektorning koordinatalari esa λx_a, λy_a, λz_a bo'ladi, ya'ni

$$\lambda \vec{a} = \{\lambda x_a;\ \lambda y_a;\ \lambda z_a\}. \tag{5}$$

Demak, ikki vektorni qo'shganda (ayirganda) ularning mos koordinatalari qo'shiladi (ayriladi). Vektorni songa ko'paytirganda, uning koordinatalari shu songa ko'payadi.

M i s o l. $\vec{a} = \{2;\ -3;\ 1\}$ vektor berilgan. Unga kollinear bo'lgan $\vec{b} = \{x;\ y;\ 4\}$ vektorining noma'lum koordinatalarini aniqlang.

Y e c h i s h. Ikki vektorning kollinearlik shartiga asosan $\vec{b} = \lambda \vec{a} = \lambda\{2\vec{i};\ -3\vec{j} + \vec{k}\}$, u holda (2) formulaga asosan $\vec{b} = \{2\lambda;\ -3\lambda + \lambda\}$. Ikkinchi tomondan, $\lambda = 4$, demak, $\vec{b} = \{8;\ -12;\ 4\}$ bo'ladi. Endi A nuqtaning koordinatalarini ko'rib o'tamiz. Aytaylik, fazoda $Oxyz$ dekart koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin. Bu sistema istalgan A nuqta uchun $\overrightarrow{OA}$ vektorning koordinatalari — uning radius-vektorining koordinatalaridir. Odatda, A nuqtaning koordinatalari shu harfning yonida kichik qavs ichida yoziladi: $A(x_a;\ y_a;\ z_a)$. A va B nuqtalarning koordinatalari ma'lum bo'lganda $\overrightarrow{AB}$ vektorning koordinatalarini topishni ko'raylik. Aytaylik, A nuqtaning koordinatalari $(x_A;\ y_A;\ z_A)$, B nuqtaning koordinatalari $(x_B;\ y_B;\ z_B)$ bo'lsin. U holda (20-chizma):

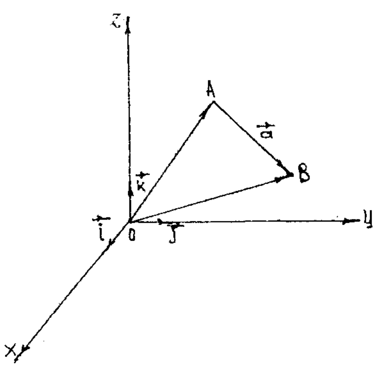
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} =$$

$$= x_B\vec{i} + y_B\vec{j} + z_B\vec{k} - x_A\vec{i} -$$

$$- y_A\vec{j} - z_A\vec{k} =$$

$$= (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} +$$

$$+ (z_B - z_A)\vec{k}.$$



20-chizma.

Bu yerdan $\overrightarrow{AB}$ vektor $x_B - x_A;\ y_B - y_A;\ z_B - z_A$ koordinatalarga ega bo'lishini ko'ramiz. Demak, vektorning koordinatalari uning mos koordinatalari ayirmasiga teng:

$$\overrightarrow{AB} = \{x_B - x_A;\ y_B - y_A;\ z_B - z_A\}. \qquad (6)$$

M i s o l. Agar $A(3;\ 4;\ 1)$ va $B(5;\ 4;\ 1)$ bo'lsa, $\overrightarrow{AB}$ vektorning koordinatalarini toping.

Y e c h i s h. Aytaylik, $\overrightarrow{AB} = \{x_{AB};\ y_{AB};\ z_{AB}\}$ bo'lsin, u holda (6) formulaga asosan: $x_{AB} = x_a - x_b = 5 - 3 = 2;$

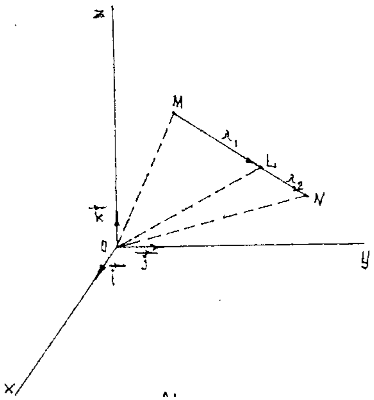
$$y_{AB} = y_a - y_b = 4 - 4 = 0;$$
$$z_{AB} = z_a - z_b = 11 - 1 = 10.$$

1.2.5. KESMANI BERILGAN NISBATDA BO'LISH

MN kesmani berilgan $\lambda_1 : \lambda_2$ nisbatda bo'lish talab qilinsin. Agar MN kesmada ML masofa absolut qiymatining LN masofa absolut qiymatiga nisbati $\lambda_1 : \lambda_2$ ga teng bo'lsa, L nuqta MN kesmani $\lambda_1 : \lambda_2$ nisbatda bo'ladi, deyiladi. Berilgan masalani hal qilish uchun MN kesmaning

$$\frac{|ML|}{|LN|} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $L(x_L;\ y_L;\ z_L)$ nuqtasining koordinatalarini topish kerak (21-chizma). Ta'riflanishiga ko'ra L nuqta MN kesmani $\lambda_1 : \lambda_2$ nisbatda bo'lishi uchun



21-chizma.

$$\overrightarrow{ML} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \overrightarrow{LN} \qquad (1)$$

tenglik bajarilishi zarur.

$\overrightarrow{ML}$ va $\overrightarrow{LN}$ vektorlarni $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OL}$ va $\overrightarrow{ON}$ radius-vektorlar orqali ifodalaymiz. U holda (1) tenglama $\overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OM} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot (\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OL})$ ko'rinishni oladi.

Bundan esa

$$\overrightarrow{OL} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \cdot \overrightarrow{OM} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \overrightarrow{ON} \quad (2)$$

kelib chiqadi.

(2) formula qo'yilgan masalaning yechimini beradi, chunki u MN kesmani berilgan $\lambda_1 : \lambda_2$ nisbatda bo'luvchi L nuqtaning radius-vektorini $M(x_M; y_M; z_M)$ va $N(x_N; y_N; z_N)$ nuqtalarning radius-vektorlari orqali ifodalaydi.

(2) vektor tenglikka asosan quyidagi tengliklarga ega bo'lamiz:

$$x_L = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} x_M + \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} x_N,$$

$$y_L = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} y_M + \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} y_N, \quad (3)$$

$$z_L = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} z_M + \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} z_N.$$

(3) formula berilgan kesmani $\lambda_1 : \lambda_2$ nisbatda bo'luvchi L nuqtaning koordinatalarini topish formulalaridir. L nuqta MN kesmaning o'rtasi bo'lgan xususiy holda (3) formula

$$x_L = \frac{x_M+x_N}{2}; \quad y_L = \frac{y_M+y_N}{2}; \quad z_L = \frac{z_M+z_N}{2} \quad (4)$$

ko'rinishni oladi. (4) formula kesmani teng ikkiga bo'luvchi nuqtaning koordinatalarini hisoblash formulalaridir.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Vektor deb nimaga aytiladi?
2. Kollinear va komplanar vektorlar deb qanday vektorlarga aytiladi?
3. Vektorlarni qo'shish va ayirish usullarini tushuntirib bering.
4. Vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi deganda nimani tushunasiz?
5. Vektorning o'qdagi proyeksiyasi nima?
6. Koordinatalari bilan berilgan vektorlarni qo'shish, ayirish va skalyarga ko'paytirishni tushuntirib bering.
7. Kesmani berilgan nisbatda bo'luvchi nuqtaning koordinatalarini hisoblash uchun formula keltirib chiqaring.

1.3. VEKTORLARNING SKALYAR, VEKTOR VA ARALASH KO'PAYTMALARI

1.3.1. VEKTORLARNING SKALYAR KO'PAYTMASI VA UNING XOSSALARI

Vektorlar ustida hozirgacha bajarilgan amallar (qo'shish, ayirish, songa ko'paytirish) chiziqli amallar bo'lib, natijada yana vektorlar kelib chiqadi. Endi vektorlar ustida natija skalyar (son) hosil bo'ladigan amalni ko'rib chiqamiz.

Ta'rif. Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektor uzunliklari bilan ular orasidagi burchak kosinusining ko'paytmasidan hosil bo'lgan son bu vektorlarning *skalyar ko'paytmasi* deyiladi. Agar ikkita vektordan birortasi nol vektor bo'lsa, skalyar ko'paytma nolga teng bo'ladi.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ko'rinishida belgilanadi, demak,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi. \qquad (1)$$

Bu yerda φ berilgan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak. (1) formula fizikada o'zgarmas F kuchning boshlang'ich B nuqtadan C nuqtagacha to'g'ri chiziqli harakati davomida bajargan ishi

$$A=|\vec{F}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cos\varphi$$

ni ifodalaydi. U skalyar kattalik bo'lib, $\vec{F}$ va $\overrightarrow{BC}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasidan iboratdir. Bu yerda φ – $\vec{F}$ va $\overrightarrow{BC}$ vektorlar orasidagi burchak.

M i s o l. $|\vec{a}|=2$; $|\vec{b}|=3$ hamda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak 135° ga teng bo'lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasini toping.

Y e c h i s h. (1) formulaga asosan topamiz:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot3\cdot\cos135^\circ=2\cdot3\cdot\cos(90^\circ+45^\circ)=$$

$$=-6\sin45^\circ=-6\frac{\sqrt{2}}{2}=-3\sqrt{2}.$$

S k a l y a r k o' p a y t m a n i n g x o s s a l a r i:

1) ixtiyoriy $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar uchun quyidagi munosabat o'rinlidir:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

Bu xossa skalyar ko‘paytmaning kommutativlik xossasi deyiladi.

I s b o t. Bu xossa skalyar ko‘paytmaning ta’rifidan bevosita kelib chiqadi, ya’ni

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi,$$
$$\vec{b} \cdot \vec{a} = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cos\varphi,$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

2) ixtiyoriy $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar va ixtiyoriy $k \in \mathrm{R}$ son uchun quyidagi tenglik o‘rinlidir:

$$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}). \qquad (2)$$

Bu xossadan vektorlarni skalyar ko‘paytirishda sonli ko‘paytuvchini skalyar ko‘paytma belgisi tashqarisiga chiqarish mumkin degan, xulosa kelib chiqadi.

I s b o t. Bu xossani isbot qilish uchun ikki vektor orasidagi burchak tushunchasidan foydalanamiz. Ma’lumki, agar $k > 0$ bo‘lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak $k\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchakka teng bo‘ladi. Ta’rifga ko‘ra:

$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = |k||\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi = k \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi = k \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$; agar $k < 0$ bo‘lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak $\alpha = 180° - \varphi$ ga teng:

$$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = |k\vec{a}| \cdot | \cdot |\vec{b}| \cos(180° - \varphi) =$$

$$= k \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi = k \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cos\varphi = k(\vec{a} \cdot \vec{b});$$

3) har qanday $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlar uchun quyidagi tenglik o‘rinlidir:

$$\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}. \qquad (3)$$

Bu xossa skalyar ko‘paytmaning distributivlik xossasi deyiladi.

I s b o t. Agar $\vec{a} = 0$ bo‘lsa, $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ tenglikning o‘rinliligi o‘z-o‘zidan ravshan. Agar $\vec{a} \neq 0$ bo‘lsa, u holda

$\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = |\vec{a}|\,\mathrm{np}_l(\vec{b}+\vec{c})$. Bu yerda l o'qi $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \vec{e}$ birlik vektori bilan aniqlangan.

Har qanday $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar uchun $\mathrm{np}_l(\vec{b}+\vec{c}) = \mathrm{np}_l\,\vec{b} + \mathrm{np}_l\,\vec{c}$ munosabat o'rinlidir.

Demak, $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = |\vec{a}|(\mathrm{np}_l\vec{b}+\mathrm{np}_l\vec{c})\,\vec{a}\,\mathrm{np}_l\vec{b} + \vec{a}\,\mathrm{np}_l\vec{c} = = \vec{a}\,\vec{b}+\vec{a}\,\vec{c}$, bundan esa $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ tenglikning o'rinli ekani ko'rinadi.

4) har qanday vektorning o'z-o'ziga skalyar ko'paytmasi bu vektor uzunligining kvadratiga teng:

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2. \tag{4}$$

Isbot. Skalyar ko'paytma ta'rifidan:

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos(\vec{a}\,^\wedge\,\vec{a}) = |\vec{a}|^2\cos 0^\circ = |\vec{a}|^2.$$

$\vec{a}\cdot\vec{a}$ ifoda $\vec{a}^{\,2}$ bilan belgilanadi va $\vec{a}$ vektorning *skalyar kvadrati* deb ataladi. Bunga ko'ra (4) tenglikdan $\vec{a}$ vektorning uzunligi uchun quyidagiga ega bo'lamiz:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a^2}. \tag{5}$$

Skalyar ko'paytma yordamida bizga tanish ba'zi ayniyatlarni isbotlash mumkin. Masalan, $(\vec{a}\pm\vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2} \pm 2\vec{a}\,\vec{b} + \vec{b}^{\,2}$ ayniyatni isbot qilaylik, buning uchun ayniyatning chap tomonidan uning o'ng tomonini keltirib chiqaramiz:

$$(\vec{a}\pm\vec{b})\cdot(\vec{a}\pm\vec{b}) = \vec{a}(\vec{a}\pm\vec{b})\pm\vec{b}\,(\cdot\vec{a}\pm\vec{b}) =$$
$$= \vec{a}\cdot\vec{a}\pm\vec{a}\cdot\vec{b}\pm\vec{a}\cdot\vec{b}\pm\vec{b}\cdot\vec{b} = \vec{a}^{\,2}\pm 2\vec{a}\,\vec{b}\pm\vec{b}^{\,2}.$$

Teorema. *Nol bo'lmagan ikkita vektorning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'lsa, bu vektorlar o'zaro perpendikular bo'ladi va aksincha.*

Isbot. Faraz qilaylik, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zaro perpendikular bo'lsin, u holda ular orasidagi burchak 90° ga teng, demak, $\cos(\vec{a}\,^\wedge\,\vec{b}) = 0$, u holda

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a}\,^\wedge\,\vec{b}),$$
$$\cos(\vec{a}\,^\wedge\,\vec{b}) = 0 \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0,$$

demak, $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ — ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'lsa, u vektorlar perpendikulardirlar. Nol bo'lmagan ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'lishi uchun $\cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}) = 0$ bo'lishi kerak, bu esa $(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})$ burchak 90° qiymatni qabul qilganda o'rinlidir. Demak, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

Endi koordinatalari bilan berilgan vektorlarning skalyar ko'paytmasini qaraymiz. $\vec{a} = \{x_a; y_a; z_a\}$ va $\vec{b} = \{x_b; y_b; z_b\}$ vektorlar koordinatalari bilan berilgan bo'lsin. U holda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar $\vec{a} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}$ va $\vec{b} = x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k}$ yoyilmalarga ega bo'ladi. Skalyar ko'paytmaning xossalaridan foydalanib $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni skalyar ko'paytiramiz:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}) \cdot (x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k}) =$$
$$= x_ax_b\vec{i}\vec{i} + x_a\vec{i}y_b\vec{j} + x_az_b\vec{k} + y_a\vec{j}x_b\vec{i} + y_ay_b\vec{j}\vec{j} + y_a\vec{j}z_b\vec{k} +$$
$$+ z_a\vec{k}x_b\vec{i} + z_a\vec{k}y_b\vec{j} + z_az_b\vec{k}\vec{k}.$$

Ta'rifga ko'ra: $\vec{i}^2 = 1$; $\vec{j}^2 = 1$; $\vec{k}^2=1$; $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$.

U holda

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_ax_b + y_ay_b + z_az_b.$$

Demak, koordinatalari bilan berilgan ikki vektorning skalyar ko'paytmasi bu vektorlar mos koordinatlari ko'paytmalarining yig'indisiga teng. Koordinatalari bilan berilgan $\vec{a} = \{x_a; y_a; z_a\}$ vektor uchun $\vec{a} \cdot \vec{a}$ skalyar ko'paytmani topaylik. $\vec{a}$ ni $\vec{a} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}$ ko'rinishda yozib olamiz: $\vec{a} \cdot \vec{a} = (x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k})\ (x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k})$. (6) tenglikka asosan: $\vec{a} \cdot \vec{a} = x_ax_a + y_ay_a + z_az_a$.

Bundan

$$|\vec{a}| = \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{a^2} = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}\,. \tag{7}$$

Bu esa koordinatalari bilan berilgan vektorning uzunligi uning koordinatlari kvadratlarining yig'indisidan olingan arifmetik kvadrat ildizga teng ekanligini ko'rsatadi. (7) formuladan foydalanib, ikki nuqta orasidagi masofani topish mumkin. $A(x_1; y_1; z_1)$ va $B(x_2; y_2; z_2)$ nuqtalar berilgan bo'lsin. U holda

$$\rho(A,B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)} \qquad (8)$$

bo'ladi, bunda $\rho(A, B)$ – A va B nuqtalar orasidagi masofa.

Skalyar ko'paytmadan foydalanib, ikki vektor orasidagi burchakni, vektorlarning o'qdagi proyeksiyalarini hisoblash mumkin. Ikki vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ orasidagi burchak $\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ formula bo'yicha hisoblanadi.

Agar vektorlar koordinatalari bilan berilgan bo'lsa, ular orasidagi burchak

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

formula bo'yicha hisoblanadi.

1.3.2. IKKI VEKTORNING VEKTOR KO'PAYTMASI VA UNING XOSSALARI. KOORDINATALARI BILAN BERILGAN IKKI VEKTORNING VEKTOR KO'PAYTMASI. UCHBURCHAKNING YUZI

Vektor ko'paytmaga ta'rif berishdan oldin uchta nokomplanar vektor uchligining fazoda joylashishiga aloqador bo'lgan quyidagi tushunchani kiritamiz.

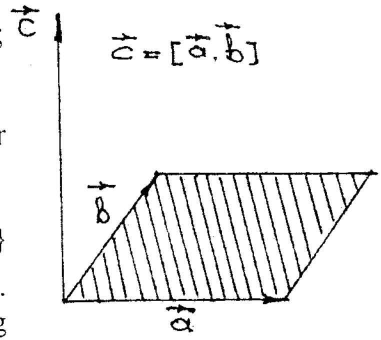
1-ta'rif. Agar uchta nokomplanar $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorni umumiy boshlang'ich nuqtaga keltirilgandan so'ng vektorlardan birini ikkinchisi bilan ustma-ust tushgunga qadar ular orasidagi kichik burchak bo'yicha aylantirish uchinchi vektorning oxiridan qaralganda soat strelkasiga qarshi yo'nalishda ko'rinsa $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar uchligi *o'ng uchlik* (agar aylantirish soat strelkasi yo'nalishi bo'yicha olinsa, *chap uchlik*) deyiladi.

2-ta'rif. Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorning *vektor ko'paytmasi* deb quyidagi uchta shartni qanoatlantiradigan $\vec{c}$ vektorga aytiladi va u $[\vec{a}, \vec{b}]$ yoki $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ ko'rinishda belgilanadi:

1) $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a} \wedge \vec{b})$; $(0 < (\vec{a} \wedge \vec{b}) < \pi)$;

2) $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{a}$, $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{b}$ ($\vec{c}$ vektor $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlarga ortogonal);

3) $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ va $\{\vec{a}, \vec{b}, [\vec{a}, \vec{b}]\}$ vektorlar uchligi o'ng uchlikni hosil qilsin.



22-chizma.

Bu ta'rifda keltirilgan uchta shartning har birining geometrik ma'nosini aniqlaylik.

1-shart $\vec{c}$ vektorning uzunligi ($|\vec{c}|$ — son) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogramm yuzini ifodalovchi songa teng ekanini bildiradi (22-chizma), chunki $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a} \wedge \vec{b})$; $(0 < (\vec{a} \wedge \vec{b}) < \pi)$ ifoda tomonlari $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan iborat parallelogramm yuzini ifodalaydi.

2-shart vektor ko'paytma (ya'ni $\vec{c}$ vektor) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar bilan aniqlanadigan tekislikka perpendikular ekanini bildiradi.

3-shart vektor ko'paytmaning yo'nalishini aniqlaydi.

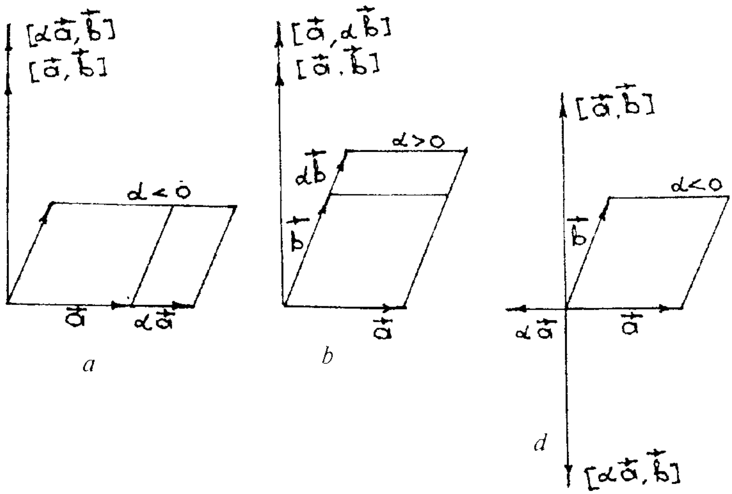
Vektor ko'paytma quyidagi xossalarga ega:

1. Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lsa yoki ulardan kamida biri nol vektor bo'lsa, ularning vektor ko'paytmasi nolga teng bo'ladi.

Isbot. Haqiqatan ham, $\vec{a} \parallel \vec{b}$ bo'lsa, $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = 0$ yoki $180°$ bo'lib, birinchi shartga asosan $|\vec{c}| = 0$ bo'ladi. Moduli nolga teng vektor esa albatta nol vektordir.

2. $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$, ya'ni ko'paytuvchilarning o'rinlarini almashtirishda vektor ko'paytmaning ishorasi o'zgaradi.

Isbot. Haqiqatan ham, vektor ko'paytma ta'rifining 1) va 2) shartlariga asosan $[\vec{a}, \vec{b}]$ va $[\vec{b}, \vec{a}]$ vektorlarning uzunliklari teng va ikkalasi ham bitta tekislikka perpendikular, yo'nalishlari esa uchinchi shartga asosan $\vec{c}$ vektor tomonga qarab eng qisqa yo'l bilan soat strelkasi harakatiga teskari bo'lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektor tomonga qarab qisqa yo'l bilan burilish esa soat strelkasi harakati bo'yicha bo'lib qoladi, demak, yo'nalish avvalgiga o'xshash bo'lishi uchun $[\vec{b}, \vec{a}]$ vektor $[\vec{a}, \vec{b}]$ vektorga nisbatan qarama-qarshi yo'nalgan bo'lishi kerak (23-*a*, *b*, *d* chizma).



23-chizma.

3. $[\alpha\vec{a},\ \vec{b}] = [\vec{a},\ \alpha\vec{b}] = \alpha[\vec{a},\ \vec{b}]$, bu yerda α istalgan haqiqiy son (skalyar ko'paytuvchiga nisbatan assotsiativlik qonuni).

I s b o t. $[\alpha\vec{a},\ \vec{b}]$ va $\alpha[\vec{a},\ \vec{b}]$ vektorlarning modullari teng, yo'nalishlari esa $\alpha > 0$ bo'lganda $[\vec{a},\ \vec{b}]$ vektor bilan bir xil, $\alpha < 0$ da esa $[\vec{a},\ \vec{b}]$ ning yo'nalishiga qarama-qarshi (23-*a*, *b*, *d* chizma).

4. $[\vec{a}+\vec{a}',\ \vec{b}] = [\vec{a},\ \vec{b}] + [\vec{a}',\ \vec{b}]$; $[\vec{a},\ \vec{b}+\vec{b}'] = [\vec{a},\ \vec{b}] + [\vec{a},\ \vec{b}']$.

Bu xossalardan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$[\alpha\vec{a}+\beta\vec{b},\gamma\vec{c}+\delta\vec{d}\,] = \alpha\gamma[\vec{a},\vec{c}\,]+\beta\gamma[\vec{b},\vec{c}\,]+\alpha\delta[\vec{a},\vec{d}\,]+\beta\delta[\vec{b},\vec{d}\,].$$

Birlik vektorlarning vektor ko'paytmalari quyidagicha bo'ladi:

$$[\vec{i},\vec{j}\,] = -[\vec{j},\vec{i}\,] = \vec{k};\quad [\vec{i},\vec{i}\,] = 0;\quad [\vec{k},\vec{i}\,] = -[\vec{i},\vec{k}\,] = \vec{j};$$

$$[\vec{j},\vec{j}\,] = 0;\ [\vec{j},\vec{k}\,] = -[\vec{k},\vec{j}\,] = \vec{i};\quad [\vec{k},\vec{k}\,] = 0.$$

Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar koordinatalari bilan berilgan bo'lsa, ya'ni $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ bo'lsa, u holda

$$[\vec{a},\ \vec{b}] = (a_2b_3 - a_3b_2)\,\vec{i} + (a_3b_1 + a_1b_3)\,\vec{j} + (a_1b_2 + a_2b_1)\,\vec{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}.$$

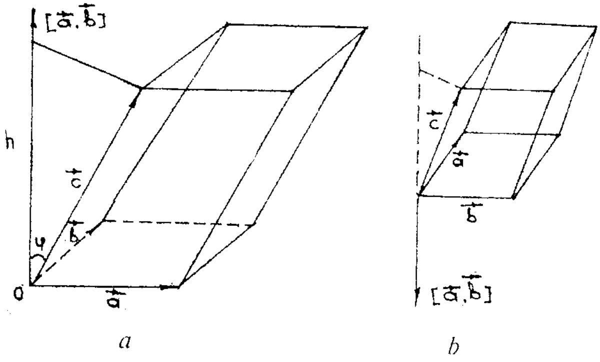
Demak, $[\vec{a},\ \vec{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\}.$

Vektor ko‘paytmadan foydalanib, uchburchakning yuzini hisoblash uchun formula chiqaramiz. Aytaylik, ABC uchburchak fazodagi $R = \{0,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\}$ to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasiga nisbatan uchlarining koordinatalari bilan berilgan bo‘lsin: $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $C(x_3,\ y_3,\ z_3)$. Vektor ko‘paytma ta’rifidagi 1-shartga ko‘ra uning moduli parallelogrammning yuzini beradi. Uning yarmi esa uchburchakning yuziga teng.

Shuning uchun $S_{ABC} = \frac{1}{2}[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}]$ ga ega bo‘lamiz.

1.3.3. UCHTA VEKTORNING ARALASH KO‘PAYTMASI TA’RIFI VA UNING XOSSALARI. KOORDINATALARI BILAN BERILGAN VEKTORLAR ARALASH KO‘PAYTMASI. TETRAEDRNING HAJMI

Ta’rif. $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarning *aralash ko‘paytmasi* deb (vektorlarning ko‘rsatilgan tartibiga ko‘ra) $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko‘paytmasidan iborat vektorni $\vec{c}$ vektorga skalyar ko‘paytirishdan hosil qilingan songa aytiladi. Aralash ko‘paytma $[\vec{a},\ \vec{b}]\cdot\vec{c}$ yoki $(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})$ ko‘rinishda belgilanadi. Aralash ko‘paytmaning geometrik ma’nosi bilan tanishaylik. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlar biror O nuqtaga qo‘yilgan bo‘lib, komplanar bo‘lmasin hamda o‘ng uchlikni hosil qilsin. Qirralari shu berilgan vektorlardan iborat parallelepiped yasasak, $[\vec{a},\ \vec{b}]$ miqdor shu parallelepiped asosining yuzini bildiradi. Aralash ko‘paytma ta’rifiga asosan $[\vec{a},\ \vec{b}]\cdot\vec{c} = |[\vec{a},\ \vec{b}]|\,\vec{c}\cos\varphi$; bu yerda: $\varphi = [\vec{a},\ \vec{b}]\hat{}\,\vec{c}$ bo‘lib, $|\vec{c}| = \cos\varphi$ miqdor $\vec{c}$ vektorning $[\vec{a},\ \vec{b}]$ vektor yo‘nalishidagi to‘g‘ri chiziqdagi proyeksiyasiga teng bo‘lib, parallelepipedning balandligidir (24-*a*, *b* chizma):



a *b*

24-chizma.

$$|\vec{c}| = \cos\varphi = h.$$

Demak,

$$[\vec{a},\ \vec{b}]\cdot\vec{c} = S_{\text{asos}}\cdot h = V. \qquad (1)$$

Bu son esa parallelepipedning hajmini aniqlaydi.

Demak, agar $[\vec{a},\ \vec{b}]\cdot\vec{c}$ vektorlar o‘ng uchlik hosil qilsa, bu vektorlarning aralash ko‘paytmasi bu vektorlarga yasalgan parallelepiped hajmiga teng bo‘ladi. Agar $(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})$lar chap uchlik tashkil qilsa, $[\vec{a},\ \vec{b}]$ vektor bilan $\vec{c}$ vektor orasidagi burchak $\alpha > \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\varphi < 0$ (24-*b* chizma) bo‘ladi. U holda $[\vec{a},\ \vec{b}]\vec{c} = -V$. Demak,

$$|[\vec{a},\ \vec{b}]\cdot\vec{c}]| = V. \qquad (2)$$

$R = \{\vec{0};\ \vec{i};\vec{j};\ \vec{k}\}$ koordinatalar sistemasiga nisbatan $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ vektorlar quyidagi koordinatalarga ega bo‘lsin:

$$\vec{a} = \{a_1;\ a_2;\ a_3\};\quad \vec{b} = \{b_1;\ b_2;\ b_3\};\quad \vec{c} = \{c_1;\ c_2;\ c_3\};$$

$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ vektorlarning aralash ko‘paytmasini hisoblaymiz. Dastlab $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko‘paytmasini topamiz:

$$[\vec{a},\ \vec{b}] = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k}. \qquad (3)$$

Endi $[\vec{a},\ \vec{b}]$ vektorni $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ vektorga skalyar ko'paytiramiz. U holda

$$[\vec{a},\ \vec{b}]\cdot\vec{c} = c_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + c_2\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}.$$

Hosil bo'lgan bu uchinchi tartibli determinantda yo'llarni ikki marta almashtiramiz:

$$[\vec{a},\ \vec{b}]\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

(4) formuladan ko'rinadiki, uchta vektorning aralash ko'paytmasi uchinchi tartibli determinantga teng bo'lib bu determinantning birinchi yo'l elementlari birinchi vektor koordinatalaridan, ikkinchi yo'l elementlari ikkinchi vektor koordinatalaridan, uchinchi yo'l elementlari esa uchinchi vektor koordinatalaridan tuziladi.

Vektorlarning aralash ko'paytmasi quyidagi xossalarga ega:

1) $[\vec{a},\ \vec{b}]\cdot\vec{c} = [\vec{b},\ \vec{c}]\vec{a}$. Haqiqatan ham, uchta vektorga qurilgan parallelepiped hajmlarining absolut qiymatlari teng, undan tashqari $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ va $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a}$ uchliklarning oriyentatsiyalari bir xil.

2) Ko'paytuvchilarning o'rinlari almashinishidan aralash ko'paytmaning ishorasi o'zgaradi:

$$[\vec{a},\ \vec{b}]\cdot\vec{c} = -[\vec{b},\ \vec{a}]\cdot\vec{c};\quad [\vec{a},\ \vec{b}]\cdot\vec{c} = -[\vec{a},\ \vec{c}]\cdot\vec{b};$$
$$[\vec{a},\ \vec{b}]\cdot\vec{c} = -[\vec{c},\ \vec{b}]\cdot\vec{a}.$$

Birinchi tenglikning o'rinliligini ko'rsatamiz.

$$[\vec{a},\ \vec{b}]\cdot\vec{c} = -[\vec{b},\ \vec{a}]\cdot\vec{c},\ \text{chunki}\ [\vec{a},\ \vec{b}] = -[\vec{b},\ \vec{a}].$$

Qolgan tengliklar o'rinliligi shunga o'xshash ko'rsatiladi.

3) $(\alpha\vec{a})[\vec{b},\ \vec{c}] = \alpha[\vec{a},\ \vec{b}]\cdot\vec{c}$: ixtiyoriy $\alpha\in R$ uchun $(\alpha\vec{a})[\vec{b},\ \vec{c}] = \alpha[\vec{a},\ \vec{b}]\cdot\vec{c}$, chunki 1-xossaga ko'ra $(\alpha\vec{a})[\vec{b},\ \vec{c}] = [\alpha\vec{a},\ \vec{b}]\cdot\vec{c}$. Bundan esa $[\alpha\vec{a}\ \vec{b}]\cdot\vec{c} = \alpha[\vec{a},\ \vec{b}]\cdot\vec{c}$.

4) $(\vec{a}+\vec{a}')[\vec{b},\ \vec{c}]=\vec{a}[\vec{b},\ \vec{c}]+\vec{a}'[\vec{b},\ \vec{c}]$; $\vec{a}[\vec{b}+\vec{b}',\ \vec{c}]=$ $=\vec{a}[\vec{b},\ \vec{c}]+\vec{a}[\vec{b}',\ \vec{c}]$.

$(\vec{a}+\vec{a}')[\vec{b},\ \vec{c}]=[\vec{a}+\vec{a}',\vec{b}]\ \vec{c}=([\vec{a},\ \vec{b}]+[\vec{a}',\ \vec{b}])\vec{c}=[\vec{a},$ $\vec{b}]\vec{c}+[\vec{a}',\ \vec{b}]\vec{c}=\vec{a}[\vec{b},\ \vec{c}]+\vec{a}'\ [\vec{b},\ \vec{c}]$.

Ikkinchi tenglik ham shunga o'xshash ko'rsatiladi.

5) agar $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlar komplanar bo'lsa, ularning aralash ko'paytmasi nolga teng bo'ladi, chunki ularga qurilgan parallelepiped tekislikda joylashib qoladi, bunday parallelepipedning balandligi nolga teng, aksincha bo'lsa, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlar komplanar bo'ladi. Haqiqatan ham, $[\vec{a},\ \vec{b}]\perp\vec{a}=0$ bo'lsa, $[\vec{a},\ \vec{b}]\perp\vec{c}$. Lekin vektor ko'paytmaning ta'rifiga asosan $[\vec{a},\ \vec{b}]\perp\vec{b}$, bundan esa $[\vec{a},\ \vec{b}]$ vektorning $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlarning har biriga perpendikularligi kelib chiqadi, demak $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlar komplanar.

6) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlardan istalgan ikkitasi kollinear bo'lsa, ularning aralash ko'paytmasi nolga teng, xususiy holda

$$[\vec{a},\ \vec{a}]\cdot\vec{b}=[\vec{a},\ \vec{b}]\ \vec{a}=[\vec{a},\ \vec{b}]\vec{a}=0.$$

Aralash ko'paytmadan foydalanib, uchlarining koordinatalari bilan berilgan tetraedrning hajmini hisoblash mumkin. Aytaylik, tetraedr uchlarining koordinatalari $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $C(x_3;\ y_3;\ z_3)$, $D(x_4;\ y_4;\ z_4)$ bo'lsin. Ma'lumki, tetraedrning hajmi uning bir uchidan chiquvchi qirralaridan yasalgan parallelepiped hajmining $\frac{1}{6}$ qismiga teng. Shuning uchun

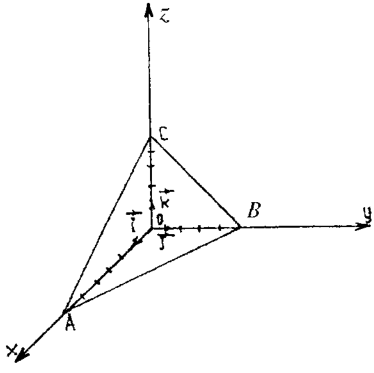
$$V=\frac{1}{6}\,|\,\overrightarrow{AB}[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]\,|=\frac{1}{6}\,|\,(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD})\,|\,. \tag{5}$$

Agar (5) formulani nuqtaning koordinatalari orqali ifodalasak,

$$V_{\text{tet}}=\frac{1}{6}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix} \tag{6}$$

yoki (6) formulani yanada ixchamroq shaklda yozsak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$V_{tet} = \frac{1}{6} \bmod \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$



25-chizma.

M i s o l. Uchlari $A(6;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 5;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 5)$ va $O(0;\ 0;\ 0)$ nuqtalarda bo'lgan piramida yasang hamda uning hajmini toping (25-chizma).

Y e c h i s h. (6) formulaga asosan:

$$V_{tet} = \frac{1}{6} \bmod \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 150 = 25 \text{ kub birlik.}$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi deb nimaga aytiladi?
2. Skalyar ko'paytmaning qanday xossalari bor?
3. O'zlarining koordinatalari bilan berilgan ikki vektorni skalyar ko'paytirish formulasini keltirib chiqaring.
4. Vektor uzunligi uchun formula keltirib chiqaring.
5. Ikki vektor orasidagi burchak uchun formula keltirib chiqaring.
6. Ikki vektorning o'zaro perpendikularlik sharti nimadan iborat?
7. Ikki vektorning vektor ko'paytmasi deb nimaga aytiladi?
8. Vektor ko'paytmaning qanday xossalari bor?
9. Vektor ko'paytmaning geometrik ma'nosi nima?
10. Vektor ko'paytma ta'rifidan foydalanib, uchburchak yuzini hisoblash uchun formula keltirib chiqaring.
11. Uchta vektorning aralash ko'paytmasi deb nimaga aytiladi?
12. Aralash ko'paytma qanday xossalarga ega?
13. Aralash ko'paytma qanday geometrik ma'noga ega?
14. Uchta vektorning komplanarlik sharti nimadan iborat?
15. Uchta vektor aralash ko'paytmasi ta'rifidan foydalanib, tetraedr hajmini hisoblash uchun formula keltirib chuqaring.

2-bob. TEKISLIKDA ANALITIK GEOMETRIYA

2.1. TEKISLIKDA CHIZIQ TENGLAMALARI

2.1.1.IKKI O'ZGARUVCHILI TENGLAMA VA UNING GRAFIGI. CHIZIQ TENGLAMASI

Aytaylik,

$$F(x,\ y) = 0 \tag{1}$$

tenglama x, y o'zgaruvchilarni bir-biri bilan bog'lovchi biror tenglama bo'lsin. Bu tenglama o'zgaruvchilaridan birini, masalan, y ni ikkinchisining funksiyasi kabi aniqlaydi. U holda (1) ni y ga nisbatan yechsak

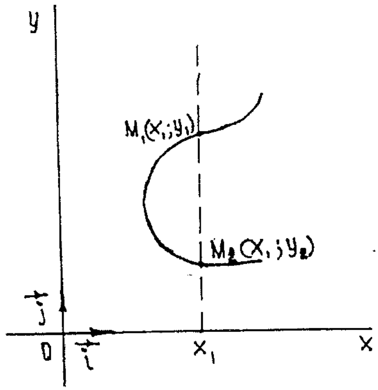
$$y = f(x),\ \ a \le x \le b \tag{2}$$

tenglama hosil bo'ladi. (2) da $x\,[a;\ b]$ kesmada o'zgarganda, $f(x)$ funksiyani uzluksiz ravishda o'zgaradi, deb qaraymiz.

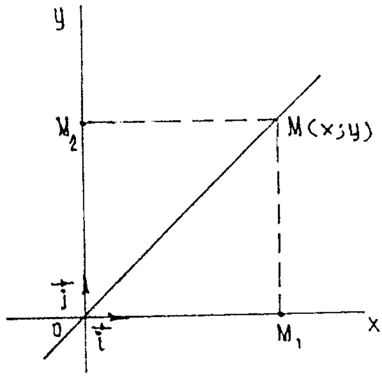
Dastlab $f(x)$ bir qiymatli funksiya deb qarab, x va y larni $R=\{0;\ \vec{i};\ \vec{j}\}$ koordinatalar tekisligidagi biror M nuqtaning koordinatalari deb faraz qilamiz. U vaqtda x ning har bir qiymati uchun (2) tenglama y ning yakka bitta qiymatini aniqlaydi. Demak, x ning har bir qiymatiga tekislikning koordinatalari $(x, f(x))$ bo'lgan birgina nuqtasi to'g'ri keladi. Agar x uzluksiz ravishda o'zgarib turli qiymatlar olsa, M nuqta $\{0;\ \vec{i};\ \vec{j}\}$ koordinatalar tekisligida x va y ning qiymatlariga qarab o'rnini o'zgartira boradi va biror geometrik o'rinni tasvirlaydi. Bu geometrik o'rin *chiziq* deb ataladi. Agar $f(x)$ funksiya ko'p qiymatli bo'lsa, ya'ni x ning har bir qiymatiga y ning bir necha $y_1, y_2, ..., y_n$ qiymatlari mos kelsa, u holda x ning har bir qiymatiga $\{0;\ \vec{i};\ \vec{j}\}$ tekislikda $M_1;\ M_2;\ ...;\ M_n$ nuqtalar to'g'ri keladi. Masalan, $y = f(x)$ funksiya ikki qiymatli bo'lsin.

Bu holda x ning har bir qiymatiga y ning $y_1 = f(x_1)$ va $y_2 = f(x_2)$ qiymatlari mos kelib, $\{0;\ \vec{i};\ \vec{j}\}$ koordinatalar tekisligida x ning x_1 qiymati bilan ikkita $M_1(x_1;\ y_1)$ va $M_2(x_1;\ y_2)$ nuqtalar aniqlanadi (26-chizma). $[a;\ b]$ kesmada x uzluksiz o'zgarganda, M_1 va M_2 nuqtalar ham o'rinlarini uzluksiz ravishda o'zgartiradi va chiziq deb atalgan geometrik o'rinni tasvirlaydi.

Ta'rif. Agar chiziq ixtiyoriy nuqtasining x va y koordinatalari (1) tenglamani qanoatlantirsa va aksincha, bu tenglamani qanoat-



26-chizma.



27-chizma.

lantiradigan har bir juft $(x;\ y)$ qiymat chiziq nuqtasini tasvirlasa, u holda (1) tenglamaga chiziqning *oshkormas tenglamasi* deb ataladi.

Analitik geometriyada ikki xil masala qaraladi: 1) berilgan geometrik xossalariga ko'ra chiziq tenglamasini tuzish; 2) tenglamasiga ko'ra chiziqning geometrik xossalarini aniqlash.

1-m i s o l. Koordinata burchaklari bissektrisalarining tenglamalarini tuzing.

Y e c h i s h. Dastlab bissektrisaga xos geometrik xossani ifodalaymiz. Burchak bissektrisasi bu burchak ichida yotuvchi va uning tomonlaridan barobar uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o'rnini ifodalaydi. Bu xossaga asoslanib I va III koordinata burchaklarining bissektrisasi tenglamasini tuzamiz (27-chizma). Agar OM birinchi koordinata burchagining bissektrisasi bo'lib, $M(x;\ y)$ uning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsa, xossaga ko'ra

$$|M_1M| = |M_2M| \quad \text{yoki} \quad y = x. \tag{3}$$

Agar $M(x;\ y)$ uchinchi koordinata burchagining bissektrisasidagi ixtiyoriy nuqta bo'lsa, x ham, y ham manfiy son bo'lib, ularning absolut qiymatlari bir-biriga teng bo'ladi va biz yana (3) tenglamaga kelamiz. Shunga o'xshash II va IV koordinata burchaklarining bissektrisasi tenglamasi

$$y = -x \tag{4}$$

ekanligini ko'rish mumkin.

2-m i s o l. $y = x$ tenglama bilan ifodalangan chiziqning geometrik xossalarini aniqlang.

Y e c h i s h. $\{0; \vec{i}; \vec{j}\}$ koordinata tekisligida $y = x$ tenglama har bir nuqtasining abssissasi uning ordinatasiga teng bo'lgan nuqtalar to'plamini aniqlaydi. Bunday xossaga ega bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rni I va III koordinata burchaklarining bissektrisasini ifodalaydi. Endi chiziqning (1) tenglamasiga ko'ra yasash masalasini qaraymiz. x, y koordinatalarni bog'lovchi biror tenglamaning tekislikda qanday chiziqni tasvir etishini bilish uchun chiziqni shu tenglamaga asoslanib yasash kerak. Tekislikdagi nuqta esa o'zining $(x; y)$ koordinatalari bilan aniqlanadi. Shuning uchun (1) tenglamadagi x ga x_1; x_2; ...; x_n qiymatlarni bersak,

$$F_1(x_1; y) = 0, \ F_2(x_2; y) = 0, \ ..., \ F_n(x_n; y) = 0 \qquad (4)$$

tenglamalar hosil bo'ladi. Bu tenglamalardan x ning x_1; x_2; ..., x_n qiymatlariga mos bo'lgan y ning y_1; y_2; ...; y_n qiymatlarini topamiz, natijada koordinatalari (1) tenglamani qanoatlantiruvchi

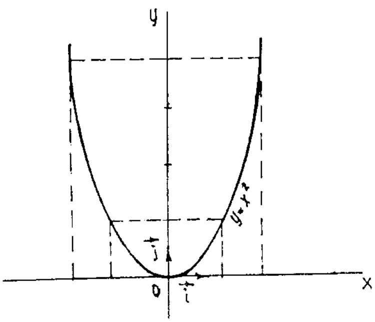
$$(x_1; y_1); \ (x_2; y_2); \ ...; \ (x_n; y_n) \qquad (5)$$

nuqtalarga ega bo'lamiz. Bu nuqtalarni koordinatalar sistemasida yasab, ularni tutash chiziq bilan birlashtirsak, (1) tenglamani tasvir etuvchi chiziq hosil bo'ladi. Bu chiziqqa ikki o'zgaruvchili (1) tenglamaning grafigi deyiladi.

3-m i s o l. $y = x^2$ tenglama tasvirlaydigan chiziqni yasang.

Y a s a s h. Tenglamadagi x ga -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ... qiymatlarni beramiz va shunga mos y ning qiymatlarini topamiz. Buni jadval shaklida yozamiz.

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	9	4	1	0	1	4	9	



28-chizma.

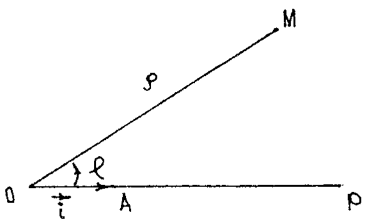
Natijada ... $(-3; 9)$; $(-2; 4)$; $(-1; 1)$; $(0; 0)$; $(1; 1)$; $(2; 4)$; $(3; 9)$; ... nuqtalar hosil bo'ladi. Bu nuqtalarni $\{0; \vec{i}; \vec{j}\}$ sistemada joylashtirib, ularni birlashtirsak, $y = x^2$ funksiyaning grafigi, ya'ni parabola chizig'i hosil bo'ladi (28-chizma).

2.1.2. QUTB KOORDINATALAR SISTEMASI. NUQTANING DEKART VA QUTB KOORDINATALARI ORASIDAGI BOG'LANISH

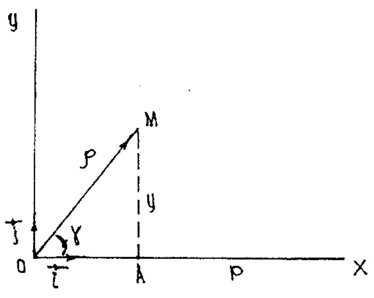
Matematikada bir necha xil koordinatalar sistemasi bilan bir qatorda qutb koordinatalari sistemasi ham qo'llaniladi. Oriyentatsiyali tekislikda biror O nuqta, $[OP)$ nur va $[OP)$ nurda yotuvchi $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ birlik vektorni olamiz. (Tekislikda olingan $R=\{0; \vec{i}; \vec{j}\}$ koordinatalar sistemasi $\vec{i}$ vektorni O nuqta atrofida $\vec{j}$ vektor ustiga tushirish uchun qisqa yo'l bo'yicha burish soat strelkasi harakatiga teskari bo'lsa, koordinatalar sistemasi musbat oriyentatsiyali, tekislikni esa oriyentatsiyalangan deyiladi). Hosil qilingan geometrik obraz *qutb koordinatalar sistemasi* deyiladi (29-chizma). Uni $R=\{0; \vec{i}; \vec{j}\}$ ko'rinishda belgilaymiz. O nuqta *qutb boshi*, $[OP)$ nur esa *qutb o'qi* deyiladi. M nuqtaning tekislikdagi holati ikki son: biri $[OA]$ masofa, ikkinchisi $[OP)$ nur $[OM)$ nurning ustiga tushishi uchun burilishi kerak bo'lgan $\varphi = \vec{i}\,\widehat{\ }\,\overrightarrow{OM}$ burchak bilan to'la aniqlanadi. Qutb o'qini $[OM)$ nur ustiga tushgunga qadar burish soat strelkasi yo'nalishiga teskari yo'nalishda bajarilsa, musbat deb, aks holda, φ manfiy deb hisoblanadi.

$\rho = |\overrightarrow{OM}|$, ρ ni M nuqtaning *qutb radiusi*, φ ni M nuqtaning *qutb burchagi* deyiladi. Ularni M nuqtaning *qutb koordinatalari* deyiladi va $M(\rho; \varphi)$ ko'rinishida belgilanadi. O nuqta uchun $\rho = 0$ bo'lib, φ aniqlanmagan hisoblanadi. Agar ρ son va φ burchak $0 \le \rho \le \infty$; $0 \le \varphi < 2\pi$ oraliqda o'zgarsa, tekislikning har bir nuqtasi qutb koordinatalari bilan mos keladi.

Har bir qutb koordinatalar sistemasiga musbat oriyentirlangan to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasini mos qo'yish mumkin. Bunda O nuqta (qutb) koordinatalar boshi bo'lib xizmat qiladi. Faraz qilaylik ρ, φ lar M nuqtaning qutb koordinatalari, x, y esa M nuqtaning to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasidagi koordinatalari bo'lsin (30-chizma).



29-chizma.



30-chizma.

U holda chizmadan:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases} \quad (1)$$

M nuqtaning qutb koordinatalari ρ va φ ma'lum bo'lsa, (1) dan x; y ni topish mumkin. (1)$\Rightarrow$

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (2)$$

Agar $\rho \neq 0$ bo'lsa, (1), (2)$\Rightarrow$

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \quad (3)$$

$M \neq 0$ nuqtaning to'g'ri burchakli dekart koordinatalari x, y ma'lum bo'lsa, (2), (3) dan ρ va φ larni topish mumkin. Demak, (1), (3) formulalar dekart va qutb koordinatalari sistemasini bog'lovchi formulalardir. Tekislikda qutb koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin. Bu sistemada biz ρ yoki φ lardan birini o'zida saqlovchi $f(\rho; \varphi)$ ifodani olaylik. Bu ifoda tekislikda bir qancha figurani ifodalashi mumkin.

Masalan, figura $f(\rho; \varphi) = \rho - 6$ munosabat bilan aniqlangan bo'lsin. U holda

a) $F_1 = \{M(\rho; \varphi) \mid \rho = 0\}$ (markazi O qutbda va radiusi $\rho = 6$ ga teng bo'lgan aylana).

b) $F_2 = \{M(\rho; \varphi) \mid \rho - 6 > 0\}$ (F_1 aylanadan tashqaridagi nuqtalar to'plami).

d) $F_3 = \{M(\rho; \varphi) \mid \rho - 6 < 0\}$ (O markazli $\rho = 6$ radiusli ochiq doira).

e) $F_4 = \{M(\rho; \varphi) \mid \rho - 6 \geq 0\}$ $(F_1 \cup F_2)$.

f) $F_5 = \{M(\rho; \varphi) \mid \rho - 6 \leq 0\}$ ($\rho = 6$ radiusli doira).

g) $F_6 = \{M(\rho; \varphi) \mid \rho - 6 \neq 0\} = (F_2 \cup F_1)$.

$f(\rho; \varphi)$ tenglamani F_1 figuraning berilgan qutb koordinatalar sistemasidagi tenglamasi deyiladi.

$$\rho = a; \ (a - \text{const}) \quad (4)$$

tenglamani olsak, u markazi qutbda, radiusi a ga teng bo'lgan aylananing tenglamasi bo'ladi.

2.1.3. TO‘G‘RI CHIZIQNING TURLI TENGLAMALARI

Ta'rif. To‘g‘ri chiziqqa parallel yoki shu to‘g‘ri chiziqda yotuvchi har qanday vektor uning *yo‘naltiruvchi vektori* deyiladi.

Quyida to‘g‘ri chiziqning berilish usullariga qarab uning tenglamasini keltirib chiqamiz.

1) to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamalari. To‘g‘ri chiziq a biror$\{0;\ \vec{i};\ \vec{j}\}$ reperga nisbatan o‘zining biror $M_0(x_0;\ y_0)$ nuqtasining va yo‘naltiruvchi $\vec{a}=\{a_1;\ a_2\}$ vektorining berilishi bilan aniqlanadi. To‘g‘ri chiziqda ixtiyoriy $M(x;\ y)$ nuqta olamiz. U holda $\overrightarrow{M_0M}$ vektor $\vec{a}$ vektor bilan kollinear bo‘ladi. U holda shunday son t topiladiki,

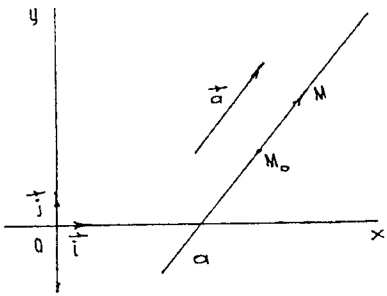
$$\overrightarrow{M_0M}=t\,\vec{a};\qquad t\in R \tag{1}$$

bo‘ladi (31-chizma). Aksincha, biror M nuqta uchun (1) munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda $\overrightarrow{M_0M}\parallel\vec{a}$, demak, (1) munosabat faqat to‘g‘ri chiziqqa tegishli M nuqtalar uchungina bajariladi. M, M_0 nuqtalarning radius-vektorlarini mos ravishda $\vec{r};\vec{r_0}$ bilan belgilasak, ya'ni $\vec{r}=OM$, $\vec{r_0}=\overrightarrow{OM_0}$ bo‘lsa, u holda $\overrightarrow{M_0M}=\vec{r}-r_0$ bo‘ladi. (1) tenglikdan:

$$\vec{r}=r_0+t\,\vec{a}\,. \tag{2}$$

Bu tenglamaga *a to‘g‘ri chiziqning vektorli tenglamasi* deyiladi. t ga turli qiymatlar berib, a ga tegishli nuqtalarning radius-vektorlarini hosil qilamiz; (2) tenglamaga kirgan t o‘zgaruvchi *parametr* deyiladi. (2) ni koordinatalarda yozsak, quyidagi tenglamalar hosil bo‘ladi:

$$\begin{aligned} x&=x_0+a_1t,\\ y&=y_0+a_2t. \end{aligned} \tag{3}$$



31-chizma.

Bu tenglamalar to‘g‘ri chiziqning *parametrik tenglamalari* deb ataladi. Agar a to‘g‘ri chiziq koordinata o‘qlaridan birortasiga ham parallel bo‘lmasa, ya'ni $a_1a_2\neq 0$ shart bajarilsa, (3) dan quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}\,. \tag{4}$$

Bundan

$$a_2x - a_1y + (-a_2x_0 + a_1y_0) = 0. \quad (5)$$

Bu yerda shartga ko'ra a_1, a_2 ning bittasi noldan farqli, shu sababli (5) birinchi darajali tenglamadir. Bundan esa har qanday to'g'ri chiziq birinchi darajali tenglama bilan ifodalanadi, degan muhim xulosaga kelamiz.

1-misol. $M_0(5; 2)$ nuqta orqali o'tuvchi va yo'naltiruvchi vektori $\vec{a} = \{2; -1\}$ bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish. Masala shartiga ko'ra: $x_0 = 5$; $y_0 = 2$; $a_1 = 2$; $a_2 = -1$ (3) formulaga asosan $x = 5 + 2t$; $y = 2 - t$ tenglamalarga ega bo'lamiz. Bu tenglamalar biz izlagan to'g'ri chiziqning parametrik tenglamalaridir.

2) ikki nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi. Bizga ma'lumki, ikki nuqta orqali yagona to'g'ri chiziq o'tadi. Agar M_1 va M_2 nuqtalarning $\{0; \vec{i}; \vec{j}\}$ sistemaga nisbatan koordinatalari ma'lum bo'lsa, shu nuqtalar orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini topamiz.

Aytaylik, $M_1(x_1; y_1)$; $M_2(x_2; y_2)$ bo'lsin. Izlanayotgan a to'g'ri chiziqda ixtiyoriy $M(x; y)$ nuqta olamiz. Agar $\overrightarrow{M_1M} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ vektor $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1; y - y_1)$ vektoriga kollinear bo'lsa, M nuqta to'g'ri chiziqda yotadi, bu deganimiz quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi:

$$\overrightarrow{M_1M} = t\,\overrightarrow{M_1M_2}. \quad (6)$$

(6) munosabatdan vektorlarni tengligiga asosan

$$x - x_1 = t(x_2 - x_1) \text{ va } y - y_1 = t(y_2 - y_1) \quad (7)$$

ga ega bo'lamiz.

Bundan esa

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (8)$$

(8) tenglama *berilgan ikki nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi* deyiladi. Bu tenglama $x_2 - x_1 \neq 0$ va $y_2 - y_1 \neq 0$ bo'lganda o'rinli. Agar $x_2 - x_1 = 0$ bo'lsa, u holda to'g'ri chiziq Oy o'qqa parallel bo'lib, tenglama quyidagi ko'rinishni oladi.

$$x - x_1 = 0 \quad \text{yoki} \quad x = x_1.$$

2-m i s o l. ABC uchburchak uchlarining koordinatalari berilgan: $A(-1; 4)$, $B(11; -5)$, $C(15; 17)$. AB va BC tomonlarining tenglamasini tuzing.

Y e c h i s h. 1) AB tomonning tenglamasini tuzamiz.

(8) formulaga murojaat qilamiz:

$$\frac{x+1}{12}=\frac{y-4}{-9};\quad -3(x+1) = 4(y-4);$$

$$-3x - 3=4y - 16;\ 4y + 3x - 13 = 0.\ (AB)$$

Endi BC tomonning tenglamasini tuzamiz.

$$\frac{x-11}{15-11}=\frac{y+5}{17+5};\quad \frac{x-11}{4}=\frac{y+5}{22};$$

$$11x - 121 = 2y + 10;\ 2y - 11x + 131= 0.\ (BC)$$

3) t o ' g ' r i c h i z i q n i n g k o o r d i n a t a o ' q l a r i d a n k e s g a n k e s m a l a r i b o ' y i c h a t e n g l a m a s i. a to'g'ri chiziqni aniqlovchi M_1 va M_2 nuqtalar koordinata o'qlari Ox va Oy da yotsin. Aniqlik uchun $M_1(a; 0)$ Ox o'qda, $M_2(0; b)$ Oy o'qida yotsin (32-chizma). Bu holda (8) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

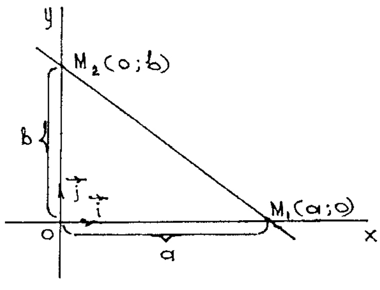
$$\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0}\ \text{yoki}\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0. \qquad (9)$$

(9) tenglamaga *to'g'ri chiziqning koordinata o'qlaridan kesgan kesmalari bo'yicha tenglamasi* deyiladi, by yerd*a* a va b lar to'g'ri chiziqni mos ravishda Ox va Oy o'qlaridan kesgan kesmalarini ifodalaydi.

3-m i s o l. To'g'ri chiziq tenglamasi berilgan: $4x-3y-12=0$, uning koordinata o'qlari bilan kesishgan nuqtalarini toping.

Y e c h i s h. Kesishgan nuqtalarning koordinatalarini topish uchun, berilgan to'g'ri chiziq tenglamasini to'g'ri chiziqning koordinatalar o'qlaridan ajratgan kesmalarga nisbatan tenglamasi (9) ko'rinishiga keltiramiz:

$$\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1.$$



32-chizma.

Demak, koordinata o‘qlari bilan kesishish nuqtalari: $A(3;\ 0)$ va $B(0;\ -4)$.

4) t o ‘ g ‘ r i c h i z i q n i n g b u r c h a k k o e f f i t s i y e n t l i t e n g l a m a s i. Dastlab, to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyenti tushunchasini kiritamiz.

Ta’rif. $\vec{a}$ vektor$\{\vec{i};\ \vec{j}\}$ bazisda a_1, a_2 koordinatalarga ega va $a_1 \neq 0$ bo‘lsa, y holda $a_2/a_1 = k$ son $\vec{a}$ vektorning *burchak koeffitsiyenti* deyiladi.

To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasini keltirib chiqaramiz. Izlanayotgan to‘g‘ri chiziqning bitta nuqtasi va burchak koeffitsiyenti tekislikda shu to‘g‘ri chiziqning vaziyatini to‘la aniqlaydi. *Oy* o‘qqa parallel to‘g‘ri chiziqlar uchun burchak koeffitsiyent mavjud emas. Shuning uchun *Oy* o‘qqa parallel bo‘lmagan *a* to‘g‘ri chiziq $M_0(x_0,\ y_0)$ nuqtadan o‘tsin va *k* burchak koeffitsiyentga ega bo‘lsin. *a* to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzamiz. (4) ga asosan $a_1 \neq 0$ shartda:

$$y - y_0 = \frac{a_2}{a_1}(x - x_0)\,, \quad \text{bu yerda} \quad \frac{a_2}{a_1} = k\,,$$

demak,

$$y - y_0 = k(x - x_0) \tag{10}$$

yoki

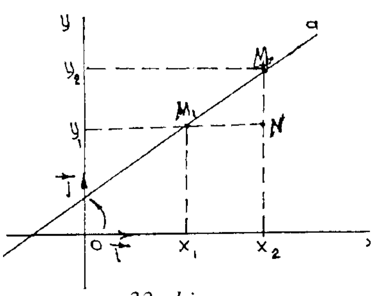
$$y = kx + b, \tag{11}$$

bu yerda:

$$b = y_0 - kx_0.$$

(11) tenglama to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi deyiladi. $M_1(x_1;\ y_1)$ va $M_2(x_2;\ y_2)$ nuqtalar orqali o‘tgan to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyenti $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ formula bilan aniqlanadi.

To‘g‘ri chiziqning bunday berilishi, to‘g‘ri chiziq *Oy* o‘qiga parallel bo‘lmagan holda to‘g‘ridir. *k* ni, ya’ni burchak koeffitsiyentni geometrik izohlaymiz (33-chizma). M_1M_2N uchburchakdan, burchak koeffitsiyent $k = \operatorname{tg}\alpha$ ekanligi ko‘rinadi, bu yerda α – *Ox* o‘qini soat strelkasi yo‘nalishiga teskari yo‘nalishda burib, *a* to‘g‘ri chiziq bilan ustma-ust tushgunga qadar burish burchagi, shuning uchun ham *k* burchak koeffitsiyenti deyiladi.



33-chizma.

4-m i s o l. $M_1(3;\ 2)$ va $M_2(4;\ 3)$ nuqtalar orqali o'tuvchi to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentini toping.

Y e c h i s h. (8) formulaga ko'ra $k=\frac{3-2}{4-3}=1$, bundan $k=\mathrm{tg}\,\alpha=1$. Demak, $\alpha = 45°$.

2-m i s o l. Ox o'qi bilan 30° burchak tashkil etib, $M_1(2;\ -3)$ nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Y e c h i s h. Izlanayotgan to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti $k=\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ga teng. (10) tenglamaga $x_0=2$; $y_0=-3$ qiymatlarni qo'yib, quyidagi tenglamaga ega bo'lamiz:

$$y+3=\frac{1}{\sqrt{3}}(x-2) \text{ yoki } x-\sqrt{3}y-(2+3\sqrt{3})=0.$$

5) b e r i l g a n n u q t a o r q a l i o ' t i b b e r i l g a n v e k t o r g a p e r p e n d i k u l a r b o ' l g a n t o ' g ' r i c h i z i q t e n g l a m a s i.

Aytaylik, $M_1(x_1;\ y_1)$ nuqta va $\vec{n}=\{A;\ B\}$ vektor berilgan bo'lsin. M_1 nuqta orqali o'tib $\vec{n}$ vektorga perpendikular bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzish talab qilinsin.

a to'g'ri chiziqda yotuvchi ixtiyoriy $M(x;\ y)$ nuqtani olaylik. M nuqta quyidagi shart bajarilgandagina a to'g'ri chiziqda yotadi:

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_1M}=0, \tag{12}$$

bu yerda: $\overrightarrow{M_1M}=\{x-x_1;\ y-y_1\}$; ikki vektorni skalyar ko'paytirishga asosan

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0 \tag{13}$$

ga ega bo'lamiz.

(13) tenglama berilgan nuqtadan o'tib, berilgan vektorga perpendikular bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini ifodalaydi. $\vec{n}$ vektor to'g'ri chiziqning *normal vektori* deyiladi.

6- m i s o l. $M_1(3;\ 1)$ nuqta orqali o'tuvchi va $\vec{N}=\{-1;\ 1\}$ vektorga perpendikular bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Y e c h i s h. (13) formuladan foydalanamiz:

$$-1(x-3)+1(y-1)=0 \text{ yoki } x-y-2=0.$$

6) T o ' g ' r i c h i z i q n i n g u m u m i y t e n g l a m a s i.

Yuqoridagi tenglamalarning barchasi uchun xarakterli bo'lgan narsa, ularning birinchi darajali bo'lishligidir.

Shuning uchun, tubandagi birinchi darajali

$$Ax + By + C = 0 \qquad (14)$$

tenglama *to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi. (14)* umumiy tenglama bilan berilgan to'g'ri chiziqning koordinata o'qlariga nisbatan joylashuvida tubandagi hollar bo'lishi mumkin:

a) agar $C= 0$ bo'lsa, (14) to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tadi;

b) agar $A= 0$, $C\neq 0$ bo'lsa, (14) to'g'ri chiziq x o'qiga, agar $B=0$, $C\neq 0$ bo'lsa, (14) to'g'ri chiziq y o'qiga parallel bo'ladi.

To'g'ri chiziq umumiy tenglamasidan burchak koeffitsiyenti k ni topaylik. $k=-A/B = a_2/a_1$, demak, to'g'ri chiziq $\vec{a}$ yo'naltiruvchi vektorining koordinatalari sifatida $-B$, A sonlarini qabul qilish mumkin, ya'ni umumiy tenglamasi bilan berilgan to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori sifatida

$$\vec{a} = \{-B;\ A\} \qquad (15)$$

vektorni olish mumkin.

Tekislikning $(x;\ y)$ koordinatali barcha nuqtalarining (14) to'g'ri chiziqdan bir tomonda joylashishi uchun $Ax+By+C > 0$ yoki $Ax+By+C < 0$ tengsizlik bajarilishi kerak. $M_1(x_1;\ y_1)$ va $M_2(x_2;\ y_2)$ nuqtalarning to'g'ri chiziqning turli tomonida joylashishlari uchun $Ax_1+By_1+C>0$ va $Ax_2+By_2+C<0$ lar turli xil ishoraga ega bo'lishlari zarur va yetarlidir.

7-misol. $2x-3y+7=0$ to'g'ri chiziqning normal vektorini ko'rsating.

Yechish. Normal vektor $\vec{N} = \{A;\ B\}$ ko'rinishda bo'lgani uchun berilgan to'g'ri chiziq tenglamasida $A=2$; $B=-3$. Shuning uchun $\vec{N} = \{2; -3\}$.

2- misol. $2x + y - 4= 0$ va $x - y + 1= 0$ to'g'ri chiziqlarni kesishish nuqtasi orqali o'tib, $x + y - 5 = 0$ to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish. Dastlab ikki to'g'ri chiziqning kesishish nuqtasini topamiz, buning uchun kesishish nuqtasi koordinatalarini x_1; y_1 deb olamiz. U holda

$$\begin{cases} 2x_1 + y_1 - 4 = 0, \\ x_1 - y_1 + 1 = 0 \end{cases}$$

sistemadan $x_1=1$; $y_1=2$ ga ega bo‘lamiz.

Izlanayotgan to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori $\vec{a}$ sifatida $x+y-5=0$ to‘g‘ri chiziqning normal vektorini olsa bo‘ladi: $\vec{a}=\{1;1\}$, u holda izlanayotgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi tubandagicha bo‘ladi:

$$1(x-1)+1(y-2)=0 \quad \text{yoki} \quad x+y-3=0.$$

2.1.4. TEKISLIKDA IKKI TO‘G‘RI CHIZIQNING O‘ZARO JOYLASHUVI

Tenglamalari bilan berilgan d_1 va d_2 to‘g‘ri chiziqlarni olaylik:

$$d_1: A_1x+B_1y+C_1=0, \qquad (1)$$

$$d_2: A_2x+B_2y+C_2=0. \qquad (2)$$

Bu to‘g‘ri chiziqlarning tekislikda o‘zaro joylashuvini tekshirish uchun (1) va (2) ni sistema qilib tekshirish kerak. Sistemani tekshirish esa chiziqli tenglamalar sistemasini tekshirishda ko‘rib o‘tilgan edi. d_1 va d_2 to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro joylashuvida ushbu hollar bo‘lishi mumkin:

a) d_1 va d_2 to‘g‘ri chiziqlar kesishadi (sistema yagona yechimga ega);

b) d_1 va d_2 to‘g‘ri chiziqlar parallel. Bu holda $A_1/A_2=B_1/B_2$ bo‘ladi;

d) agar $A_1/A_2=B_1/B_2=C_1/C_2$ bo‘lsa, d_1 va d_2 to‘g‘ri chiziqlar ustma-ust tushadi.

1-misol. $x-4y+3=0$ va $2x-y+5=0$ to‘g‘ri chiziqlarning tekislikda joylashuvini tekshiring.

Yechish. Tekislikda joylashuvini tekshirish uchun tubandagi sistemani tekshiramiz:

$$\begin{cases} x-4y+3=0, \\ 2x-y+5=0. \end{cases}$$

Bu sistemadan kesishish nuqtasini topamiz: $\left(-\frac{17}{7}; \frac{1}{7}\right)$.

Demak, to‘g‘ri chiziqlar kesishadi.

2.1.5. IKKI TO‘G‘RI CHIZIQ ORASIDAGI BURCHAK

d_1 va d_2 to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak deganda, bu to‘g‘ri chiziqlarning yo‘naltiruvchi vektorlari orasidagi burchak tushuniladi (φ burchak 0° dan 90° gacha oraliqda o‘zgaradi).

$$d_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad (1)$$
$$d_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0. \quad (2)$$

$\vec{d_1} = \{-B_1;\ A_1\}$ vektor d_1 to'g'ri chiziqning, $\vec{d_2} = \{-B_2;\ A_2\}$ vektor d_2 to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektoridir. U holda ta'rifga asosan, d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak quyidagi formuladan aniqlanadi:

$$\cos\varphi = \cos(\vec{d_1} \wedge \vec{d_2}) = \frac{\vec{d_1} \cdot \vec{d_2}}{|\vec{d_1}| \cdot |\vec{d_2}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \quad (3)$$

Xususiy holda

$$\vec{d_1} \perp \vec{d_2} \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \quad (4)$$

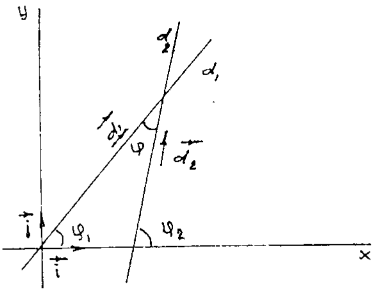
(4) tenglik ikki to'g'ri chiziqning perpendikularlik sharti hisoblanadi. $\{0;\ \vec{i};\ \vec{j}\}$ sistemada Oy o'qqa parallel bo'lmagan d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlar burchak koeffitsiyentli tenglamalari bilan berilgan bo'lsin (34-chizma):

$$d_1: y = k_1x + b_1.$$
$$d_2: y = k_2x + b_2.$$

Bu holda ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak tubandagi formula bilan ifodalanadi:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \quad (5)$$

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{1 + k_1k_2}{k_2 - k_1}. \quad (6)$$



34-chizma.

bu yerda: φ — ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. (5) formula to'g'ri chiziqlar perpendikular bo'lmagan holda ishlatiladi. (5) va (6) formuladan $k_1 = k_2$ — to'g'ri chiziqlarning parallellik, $k_1k_2 = -1$ — to'g'ri chiziqlarning perpendikularlik shartlari kelib chiqadi.

Agar to'g'ri chiziqlar umumiy tenglamalar bilan berilsa, u holda

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\begin{vmatrix}A_1 & A_2\\ B_1 & B_2\end{vmatrix}}{A_1A_2+B_1B_2}. \qquad (7)$$

To‘g‘ri chiziqlar umumiy tenglamalari bilan berilgan bo‘lsa, u holda

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}. \qquad (8)$$

(8) — ikki to‘g‘ri chiziqning parallelik sharti,

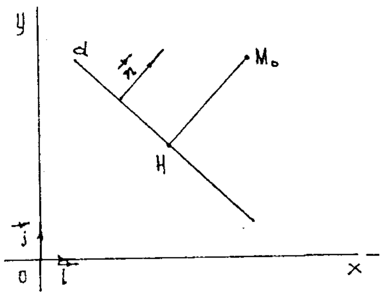
$$A_1A_2+B_1B_2=0 \qquad (9)$$

tenglik esa ikki to‘g‘ri chiziqning perpendikularlik sharti hisoblanadi.

2.1.6. NUQTADAN TO‘G‘RI CHIZIQQACHA MASOFA

$\{0;\vec{i};\vec{j}\}$ koordinatalar sistemasida d to‘g‘ri chiziq $Ax+By+C=0$ tenglamasi bilan va $M_0(x_0;\,y_0)$ nuqta berilgan bo‘lsin. M_0 nuqtadan d to‘g‘ri chiziqqa perpendikular o‘tkazamiz va ularning kesishgan nuqtasini H bilan belgilaymiz (35-chizma). $\overrightarrow{HM_0}$ vektorning uzunligini M_0 *nuqtadan d to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa* deyiladi va $\rho(M_0,\,d)$ ko‘rinishda belgilanadi. $\vec{n}=\{A,\,B\}$ vektor berilgan to‘g‘ri chiziqning normal vektori bo‘lsin. Agar M_0 nuqta d to‘g‘ri chiziqning nuqtasi bo‘lsa, $\rho(M_0,\,d)=0$ bo‘ladi. Agar M_0 nuqta d to‘g‘ri chiziqga tegishli bo‘lmasa, u holda $\rho(M_0,\,d)=\left|\overrightarrow{HM_0}\right|;\left|\overrightarrow{HM_0}\right|$ va $\vec{n}$ vektorlar kollinear, chunki $\vec{n}$ vektor d to‘g‘ri chiziqning normali. U holda nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha masofa tubandagicha bo‘ladi:

$$\rho(M_0,\,d)=\frac{\left|\overrightarrow{HM_0}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|}. \qquad (1)$$



35-chizma.

Agar H nuqtaning koordinatalari $x_1;\,y_1$ bo‘lsa, u holda $\left|\overrightarrow{HM_0}\right|=\{x_0-x_1;\,y_0-y_1\}$ bo‘ladi. H nuqta d to‘g‘ri chiziqqa tegishli bo‘lgani uchun $A_1x+B_1y+C_1=0$ bo‘ladi, u holda (1) formula quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$\overrightarrow{HM_0}\,\vec{n}=A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)=Ax_0+By_0-(Ax_1+By_1)=$$
$$Ax_0+By_0+C=0 \qquad (2)$$

Shu bilan birga $|\vec{n}|=\sqrt{A^2+B^2}$ ekanini nazarda tutsak, (1) formula quyidagi koʻrinishni oladi:

$$\rho(M_0,\ d)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (3)$$

(3) — berilgan M_0 nuqtadan berilgan d toʻgʻri chiziqqacha boʻlgan masofani hisoblash formulasidir.

2.1.7. TOʻGʻRI CHIZIQLAR DASTASI

Toʻgʻri chiziqlar dastasi ikki xil boʻladi: kesishuvchi toʻgʻri chiziqlar dastasi va parallel toʻgʻri chiziqlar dastasi. Agar 5-mavzudagi (1) va (2) tenglamalar bilan ifodalanuvchi toʻgʻri chiziqlar biror nuqtada kesishsa, u nuqta orqali oʻtuvchi toʻgʻri chiziqlar *kesishuvchi toʻgʻri chiziqlar dastasini* tashkil qiladi. Shu nuqta *dasta markazi* deyiladi.

Agar (1) va (2) toʻgʻri chiziqlarning yoʻnaltiruvchi vektorlari parallel yoki ustma-ust tushsa, u holda shu yoʻnalishdagi toʻgʻri chiziqlar *parallel toʻgʻrii chiziqlar dastasini* ifodalaydi. Kesishuvchi toʻgʻri chiziqlar dastasining markazi orqali oʻtuvchi toʻgʻri chiziq quyidagi tenglama bilan aniqlanadi:

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)\ +\ \beta(A_2x+B_2y+C_2)=0,$$

bu yerda: α va β lar bir vaqtda nolga teng boʻlmagan har xil qiymatlarni qabul qiladi. Agar kesishuvchi toʻgʻri chiziqlar dastasi markazining koordinatalari $(x_0;\ y_0)$ berilgan boʻlsa, u holda dasta tenglamasi tubandagi koʻrinishga ega boʻladi:

$$\alpha(A_1x_0+B_1y_0+C_1)+\ \beta(A_2x_0+B_2y_0+C_2)=0. \qquad (1)$$

M i s o l. Toʻgʻri chiziqlar $x+y+10=0$ va $2x-3y-5=0$ tenglamalar bilan berilgan. Shu toʻgʻri chiziqlar va $M(1;\ 2)$ nuqta orqali oʻtuvchi toʻgʻri chiziq tenglamasini tuzing.

Y e c h i s h. Dastlab berilgan toʻgʻri chiziqlardan oʻtuvchi toʻgʻri chiziqlar dastasi tenglamasini tuzamiz:

$$x+y+10\ +\ \lambda(2x-3y-5)=0. \qquad (*)$$

Bu to‘g‘ri chiziqlar dastasidan $M(1;\ 2)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqni ajratib olishimiz kerak. Biz izlayotgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini M nuqta koordinatalari qanoatlantirishi kerak. Shuning uchun M nuqta koordinatalarini (*) tenglamaga qo‘yamiz:

$$1 + 2 + 10 + \lambda(2\cdot 1-3\cdot 2-5)=0;\quad \lambda=\frac{13}{9}.$$

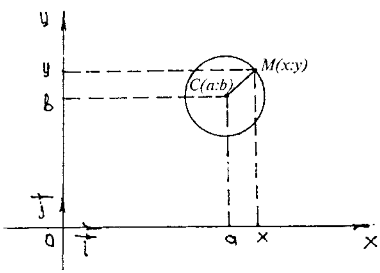
Bu qiymatni (*) tenglamaga qo‘yib izlanayotgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini olamiz: $7x - 6y + 5 = 0$.

2.2. IKKINCHI TARTIBLI EGRI CHIZIQLAR

Bizga ma’lumki, tekislikda to‘g‘ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasida har qanday birinchi tartibli ikki o‘zgaruvchili tenglamalar ya’ni $Ax + By + C = 0$ ko‘rinishdagi tenglama (A va B koeffitsiyentlar bir vaqtda nolga teng emas) to‘g‘ri chiziq tenglamasi edi. Endi ikkinchi tartibli ikki o‘zgaruvchili tenglamani qaraymiz. Bunday tenglama bilan ifodalanuvchi chiziqlar ikkinchi tartibli egri chiziqlar deyiladi. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning turlari bilan tanishamiz.

2.2.1. AYLANA

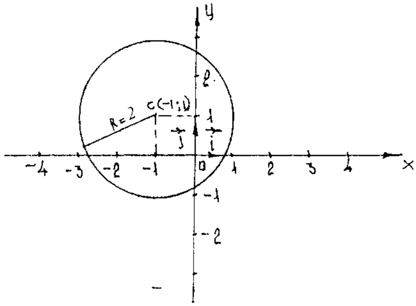
$R=\{0;\ \vec{i};\ \vec{j}\}$ koordinatalar sistemasi berilgan bo‘lsin. Bu sistemaga nisbatan $C(a;\ b)$ markazli va R radiusli aylana tenglamasini tuzamiz. Aylananing har bir nuqtasi berilgan $C(a;\ b)$ nuqtadan barobar teng uzoqlikda yotgan tekislik nuqtalarining geometrik o‘rni bo‘lishi ta’rifidan foydalanamiz (36-chizma). $M(x;\ y)$ — aylananing ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin. Xossaga ko‘ra:



36-chizma.

$$MC = R = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \quad \text{yoki} \quad (x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \qquad (1)$$

(1) tenglama *markazi $C(a;\ b)$ nuqtada va radiusi R ga teng aylananing kanonik tenglamasidir.* Agar aylana markazi koordinatalar sistemasi boshi bilan ustma-ust tushsa, tenglama quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:



37-chizma.

$$x^2 + y^2 = R^2. \qquad (2)$$

Egri chiziq parametrik ko'rinishdagi tenglamaga ham ega. Aytaylik, M nuqta egri chiziq bo'ylab harakatlansin va biron t vaqtda $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ koordinatalarga ega bo'lsin. U holda

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad (3)$$

tenglamalar sistemasi egri chiziqning parametrik tenglamalari deyiladi, bunda t parametr hisoblanadi. Masalan,

$$\begin{cases} x = R\cos(t), \\ y = R\sin(t) \end{cases} \qquad (4)$$

tenglamalar aylananing parametrik tenglamalaridir. Agar egri chiziqning parametrik tenglamalari ma'lum bo'lsa, undan foydalanib, egri chiziqning oshkormas ko'rinishdagi tenglamasini keltirib chiqarish mumkin. Oshkormas tenglama ba'zi hollarda chiziq tenglamasini ifodalamasligi ham mumkin. Boshqacha aytganda, chiziqqa tegishli bo'lmagan nuqtaning koordinatalari oshkormas tenglamani qanoatlantirishi mumkin. Agar (4) sistemadan t parametrni chiqarsak, $x^2+y^2= R^2$ tenglamaga ega bo'lamiz.

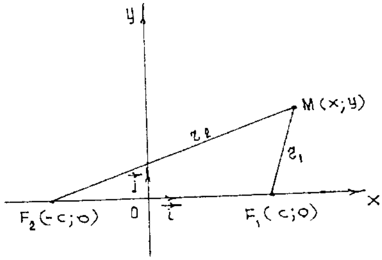
M i s o l. Markazi $C(-1;\ 1)$ nuqtada, radiusi 2 birlik bo'lgan aylana yasang.

Y e c h i s h. Shartga ko'ra aylana markazining koordinatalari $a = -1$, $b = 1$ va radiusi uzunligi $R = 2$ bo'lganligidan $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ formulaga ko'ra aylana tenglamasi $(x+1)^2 + (y-1)^2=4$ bo'ladi (37-chizma).

2.2.2. ELLIPS

1-ta'rif. Ixtiyoriy nuqtasidan *fokuslari* deb ataluvchi berilgan ikki F_1 va F_2 nuqtagacha bo'lgan masofalar yig'indisi o'zgarmas miqdor $2a$ ga teng bo'lgan tekislikdagi barcha nuqtalar to'plamiga *ellips* deb ataladi.

O'zgarmas miqdor $2a$ fokuslar orasidagi masofadan katta deb olinadi. Ellips tenglamasini tuzish uchun koordinatalar sistemasini tubandagicha kiritamiz. Berilgan ikki nuqtani birlashtiruvchi to'g'ri chiziqni abssissalar o‘qi deb qabul qilamiz, koordinatalar boshini esa berilgan nuqtalar o‘rtasida olamiz.



38-chizma.

Berilgan F_1 va F_2 fokuslar orasidagi masofani $2c$ bilan belgilaymiz. U holda F_1, F_2 nuqtalarning koordinatalari mos ravishda $(c;\ 0)$ va $(-c;\ 0)$ ga teng bo‘ladi.

Ta’rifga ko‘ra $2a>2c$ yoki $a>c$. Ellips ixtiyoriy nuqtasini $M(x;\ y)$ bilan belgilaymiz (38-chizma). Ellipsdagi ixtiyoriy M nuqtaning F_1 va F_2 fokuslaridan masofalarini uning *fokal radiuslari* deyiladi va r_1, r_2 bilan belgilanadi, ya’ni $r_1=\rho(F_1,\ M)$ va $r_2=\rho(F_2,\ M)$. Ellipsning ta’rifiga ko‘ra

$$\rho(F_1,\ M)+\rho(F_2,\ M)=2a. \qquad (*)$$

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga ko‘ra:

$$|F_1,M|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\ ;\ |F_2,M|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}. \qquad (**)$$

$$(**),\ (*)\Rightarrow\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a.$$

Bu tenglamaning 1-hadini o‘ng tomonga o‘tkazib, hosil bo‘lgan tenglamaning ikkala tomonini kvadratga ko‘tarsak:

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2,$$

bundan

$$2cx=-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+4a^2-2cx.$$

Bu ifodani ixchamlashtirgandan keyin quyidagi tenglamaga ega bo‘lamiz:

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Tenglamaning ikkala qismini $a^2(a^2-c^2)$ga bo‘lib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-b^2}=1.$$

$a>c$ bo'lgani uchun a^2-c^2 musbat miqdordir, uni b^2 bilan belgilasak, tenglama

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (5)$$

ko'rinishni oladi. (5) tenglamaga *ellipsning kanonik tenglamasi* deyiladi. Ellipsning kanonik tenglamasiga ko'ra shaklini o'rganamiz.

1) (5) tenglama bilan aniqlangan ellips koordinata o'qlariga nisbatan simmetrikdir. Haqiqatan, $(x;\ y)$ shu ellipsning biror nuqtasi bo'lsa, ya'ni $x;\ y$ sonlar (5) tenglamani qanoatlantirsa, u vaqtda (5) tenglamada o'zgaruvchi $x;\ y$ ning faqat kvadratlari qatnashgani uchun, bu tenglamani $(-x;\ y)$ $(x;\ -y)$ va $(-x;\ -y)$ nuqtalarning koordinatalari ham qanoatlantiradi (39-*a* chizma). Shuning uchun koordinata o'qlari ellipsning simmetriya o'qlaridir. Simmetriya o'qlarining kesishgan nuqtasi $0(0;0)$ ellipsning *markazi* deyiladi, fokuslar yotgan o'qi uning *fokal o'qi* deyiladi.

2) ellipsning koordinata o'qlari bilan kesishgan nuqtalarini topamiz. Masalan Ox o'q bilan kesishgan nuqtalarni topish uchun ushbu tenglamalarni birgalikda yechamiz:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ y=0. \end{cases} \qquad (6)$$

(6) sistemaning ikkinchi tenglamasidan $y=0$ ni birinchi tenglamasiga qo'ysak, $x=\pm a$ hosil bo'ladi. Shunday qilib, ellips Ox o'qini $A_1(a;\ 0)$ va $A_2(-a;\ 0)$ nuqtalarda kesadi. Shu singari ellipsning Oy o'q bilan kesishgan $B_1(0;\ b)$ va $B_2(0;\ -b)$ nuqtalari topiladi. Demak, ellipsning barcha nuqtalari tomonlari $2a$, $2b$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchak ichiga joylashgan (39-*b* chizma).

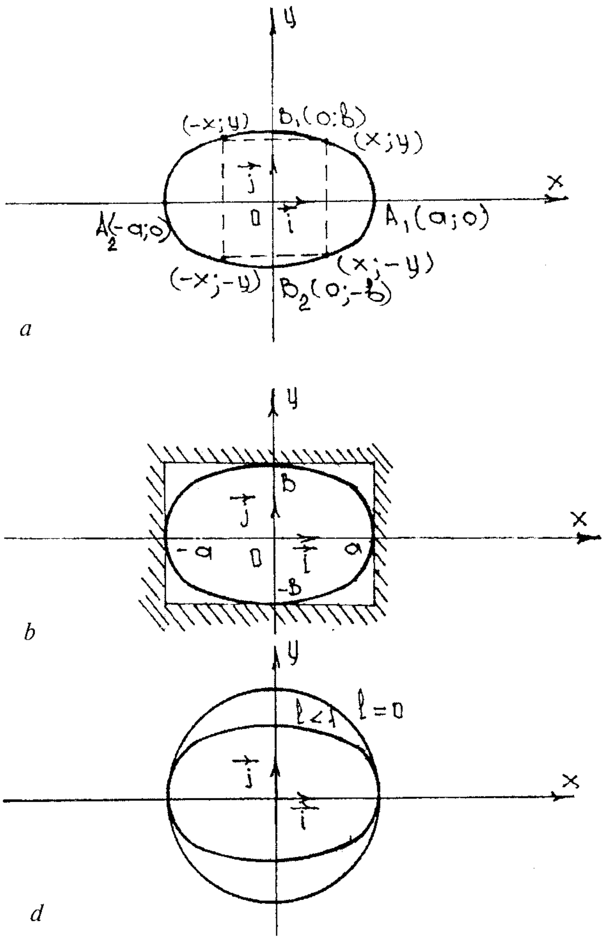
2-ta'rif. Ellipsning fokuslari orasidagi masofaning katta o'qining uzunligiga nisbati uning *ekssentrisiteti* deyiladi va e harfi bilan belgilanadi. Ta'rifga ko'ra:

$$e=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}, \qquad (7)$$

hamda $c<a \Rightarrow 0<e<1$.

Ellipsning ekssentrisiteti uning shaklini aniqlashda muhim rol o'ynaydi. Haqiqatan ham, $c^2=a^2-b^2$, shuning uchun

$$e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\left(\frac{b^2}{a^2}\right), \quad \text{bundan} \quad \frac{b}{a}=\sqrt{1-e^2}.$$



39-chizma.

Ekssentrisitet $e \Rightarrow 1$ da $b/a \Rightarrow 0$ bo‘lib, b kichiklashadi va ellips Ox o‘qqa qisila boradi, aksincha, $e \Rightarrow 0$ bo‘lsa, bu holda ellips aylanaga yaqinlasha boradi. Xususiy holda $a = b$ bo‘lsa, u aylanadan iborat bo‘ladi (39-*d* chizma).

Ellipsning koordinata o‘qlari (simmetriya o‘qlari) bilan kesishgan nuqtalari uning *uchlari* deyiladi. Ellipsning 4 ta uchi bor (chizmada ular A_1, A_2, B_1, B_2 bilan belgilangan), $[A_1A_2]$ kesma va uning uzunligi $2a$ ellipsning *katta o‘qi*, $[OA_1]$ kesma va uning uzunligi a esa ellipsning *katta yarim o‘qi* deyiladi. $[B_1B_2]$ kesma va uning uzunligi $2b$ ellipsning *kichik o‘qi*, $[OB_1]$ kesma va uning uzunligi b esa ellipsning *kichik yarim o'qi* deyiladi. Ellips chegaralangan chiziq (5) tenglamadan ko'rinadiki, uning chap tomonidagi ifoda doimo musbat bo'lib, har bir hadi quyidagi shartni qanoatlantirishi kerak:

$$\frac{x^2}{a^2} \leq 1; \quad \frac{y^2}{b^2} \leq 1,$$

bundan $$|x| \leq a; \; |y| \leq b.$$

1-m i s o l. Katta yarim o'qi 5 ga, kichik yarim o'qi 3 ga teng bo'lgan ellipsning kanonik tenglamasini yozing.

Y e c h i s h. Shartga ko'ra: $a = 5$, $b = 3$. (5) formulaga asosan:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 .$$

2-m i s o l. $M(0; 9)$ nuqta orqali o'tuvchi, fokuslari orasidagi masofa 4 ga teng bo'lgan ellipsning kanonik tenglamasi yozilsin.

Y e c h i s h. Ellipsning kanonik tenglamasini yozamiz:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, shartga ko'ra $M(0; 3)$ nuqta ellipsga tegishli, shuning uchun $\frac{9}{b^2} = 1$, bundan $b^2 = 9$. Endi a^2 parametrni topish qoldi:

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

c — fokuslar orasidagi masofaning yarmi bo'lgani uchun, shartga ko'ra $c=2$. U holda $a^2 = 9+4=13$.

Demak, $$\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

3-m i s o l. $9x^2 + 16y^2 = 144$ ellipsning ekssentrisitetini toping.

Y e c h i s h. Berilgan ellipsning tenglamasini kanonik ko'rinishga keltiramiz:

$$9x^2 + 16y^2 = 144 \Rightarrow \frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1, \quad \text{bu yerda } a = 4; \; b = 3;$$

bulardan foydalanib, c ni topamiz: $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{7}$; $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

2.2.3. GIPERBOLA

Ta'rif. Ixtiyoriy nuqtasidan fokus deb ataluvchi berilgan ikki F_1 va F_2 nuqtagacha bo'lgan masofalar ayirmasining absolut qiymati o'zgarmas miqdor $2a$ teng bo'lgan tekislikdagi barcha nuqtalar to'plamiga *giperbola* deyiladi.

O'zgarmas miqdor $2a$ fokuslar orasidagi masofadan kichik deb olinadi.

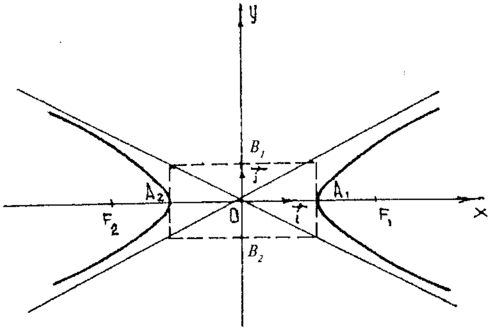
Giperbola tenglamasini keltirib chiqarish uchun belgilashlarni, chizmani oldingi ellips tenglamasiga o'xshash qilib olamiz. Giperbola ta'rifiga ko'ra $||F_1, M|-|F_2, M||$ yoki $\sqrt{(x-c^2)+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=$ $=2a.$ Ildizlarni yo'qotgandan keyin quyidagi tenglamaga ega bo'lamiz. (Ildizlarni yo'qotish ixchamlash va soddalashtirish ham oldingi mavzudagidek bajariladi):

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1. \qquad (*)$$

Ta'rifga ko'ra $c > a$, shuning uchun c^2-a^2 miqdor musbat bo'ladi. c^2-a^2 ifodani b^2 bilan belgilaymiz, ya'ni $c^2-a^2=b^2$. U holda (*) tenglama

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (8)$$

ko'rinishni oladi. Bu tenglamaga *giperbolaning kanonik tenglamasi* deyiladi. Giperbolaning (8) tenglamasiga ko'ra shaklini aniqlaymiz. Buning uchun giperbola tenglamasidan ham ellips tenglamasi ustida olib borilgan muhokamalarni takrorlab, giperbolaning tarmoqlari koordinatalar boshi va koordinata o'qlariga nisbatan simmetrikligi aniqlanadi. Giperbola Ox o'qni $A_1(a;\ 0)$ va $A_2(-a;\ 0)$ nuqtalarda kesadi (40-chizma). (8) tenglama bilan aniqlangan giperbola Oy o'q bilan kesishmaydi. Haqiqatan, (8) tenglamaga $x=0$ ni qo'ysak, $y^2=b^2$ bo'ladi, holbuki bu tenglik haqiqiy sonlar sohasida o'rinli bo'lmaydi. A_1, A_2 nuqtalar giperbolaning *uchlari* deyiladi. Giperbolaning uchlari orasidagi $2a$ masofa uning *haqiqiy o'qi* deyiladi.



40-chizma.

Ordinatalar o'qida 0 dan b masofada turuvchi $B_1(0;\ b)$ va $B_2(0;\ b)$ nuqtalarni belgilaymiz. $|B_1B_2| = 2b$ ni giperbolaning *mavhum o'qi* deyiladi. Agar $M(x;\ y)$ nuqta giperbolada yotsa, uning uchun (8) tenglamadan $|x| \geq a$, demak, $x = +a$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan $-a<x<a$ oraliqda giperbolaning nuqtalari yo'q. (8) tenglamani y ga nisbatan yechamiz:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\ . \tag{9}$$

Bu tenglamadan ko'rinadiki, x miqdor a dan $+\infty$ gacha ortganda va $-a$ dan ∞ gacha kamayganda, y miqdor $-\infty<y<+\infty$ oraliqdagi qiymatlarni qabul qiladi. Demak, giperbola ikki qismdan iborat bo'lib, ular giperbolaning *tarmoqlari* deyiladi. Giperbolaning bir (o'ng) tarmog'i $x > a$ yarim tekislikda, ikkinchi (chap) tarmog'i $x<-a$ yarim tekislikda joylashgan.

Agar giperbolaning fokuslari ordinatalar o'qida joylashgan bo'lsa, uning kanonik tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{10}$$

ko'rinishda bo'ladi. Giperbola asimptotalarga ega. Agar tekis chiziqning nuqtasi shu chiziq bo'ylab harakatlanib borganida, uning d to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofasi nolga intilsa, d to'g'ri chiziq egri chiziqning *asimptotasi* deyiladi.

$y = \frac{b}{a}x;\ \ y = -\frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziqlar $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ giperbolaning asimptotalaridir (40-chizma).

Yarim o'qlari teng bo'lgan giperbola *teng tomonli* deb ataladi. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ tenglamada $a = b$ bo'lganda:

$$x^2 - y^2 = b. \tag{11}$$

Teng tomonli giperbola asimptotalarining tenglamalari $y = x$, $y = -x$ ko'rinishda bo'lib, ular o'zaro perpendikular bo'ladi. Bu asimptotalarni yangi koordinata o'qlari sifatida qabul qilsak, teng tomonli giperbola tenglamasi o'rta maktab kursida ko'riladigan ixcham $xy = a$ ko'rinishni oladi.

Giperbolaning fokuslari orasidagi masofani haqiqiy o‘qining uzunligiga nisbati giperbolaning *ekssentrisiteti* deyiladi va ellipsdagidek e harfi bilan belgilanadi:

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}.$$

Giperbolada $c>a \Rightarrow e>1$ ekssentrisitet uning shaklini aniqlashda muhim rol o‘ynaydi. Haqiqatan ham, $e = c/a$ dan $c = ea$, buni $b^2 = c^2-a^2$ ga qo‘ysak, $b^2 = a^2(e^2-1)$ yoki $\frac{b}{a}=\sqrt{e^2-1}$ bo‘lib, bundan ko‘rinadiki, ekssentrisitet e qanchalik kichik, ya’ni $e \Rightarrow 1$ bo‘lsa, b/a shunchalik kichik, $b/a \to 0$, ya’ni giperbola o‘zining haqiqiy o‘qiga siqilgan bo‘ladi, aksincha, e kattalashib borsa, b/a ham kattalashib, giperbola tarmoqlari kengayib boradi.

1- m i s o l. Giperbolaning haqiqiy o‘qi 18 ga, fokuslari orasidagi masofa 24 ga teng bo‘lsa, uning kanonik tenglamasini tuzing.

Y e c h i s h. Shartga ko‘ra: $2a = 18 \Rightarrow a = 9$ va $2c = 24 \Rightarrow c = 12$. Endi b^2 ni topish qoldi, $b^2 = c^2-a^2 = 63$. Demak, $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{63}=1$.

2-m i s o l. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ giperbola tenglamasi berilgan. Giperbolaning haqiqiy va mavhum yarim o‘qlarini, fokuslarini, ekssentrisitetini toping.

Y e c h i s h. Berilgan tenglamada $a^2 = 25$, $a = 5$, $b^2 = 16$, $b = 4$, demak, $c^2 = a^2 + b^2 = 25 + 16 = 41$, bundan $c = +\sqrt{41}$;

$$F_1(\sqrt{41}\,;\, 0);\ F_2(-\sqrt{41}\,;\, 0).$$

Endi e ni aniqlaymiz: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{41}}{5}$.

3 - m i s o l . $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1$ giperbolaning asimptota tenglamalarini tuzing.

Y e c h i s h. Berilgan tenglamada $a^2 = 5$, $b^2 = 20$, bundan $a = \sqrt{5}$, $b = 2\sqrt{5}$. Asimptota tenglamalari $y=\frac{b}{a}x;\ y=-\frac{b}{a}x$ ko‘rinishda edi. Demak,

$$y=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}x \text{ yoki } y=2x \text{ va } y=-\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}x \text{ yoki } y=-2x.$$

4-m i s o l. Giperbolaning $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$ tenglamasi berilgan. Bu giperbolaning haqiqiy va mavhum yarim o‘qlarini, fokuslarini, uchlarini, asimptota tenglamalarini aniqlang.

Y e c h i s h. Tenglamaga ko‘ra: $a = 3$, $b = \sqrt{7}$; $c^2 = a^2 + b^2$, $c = \sqrt{9+7} = 4$.

Giperbola fokuslari: $F_1(4;\ 0)$; $F_2(-4;\ 0)$.

Giperbola uchlari: $A_1(3;\ 0)$; $A_2(-3;\ 0)$, $B(0;\ \sqrt{7})$, $B(0;\ -\sqrt{7})$.

Asimptota tenglamalari:

$$y = \frac{\sqrt{7}}{3}x; \quad y = -\frac{\sqrt{7}}{3}x.$$

2.2.4. PARABOLA

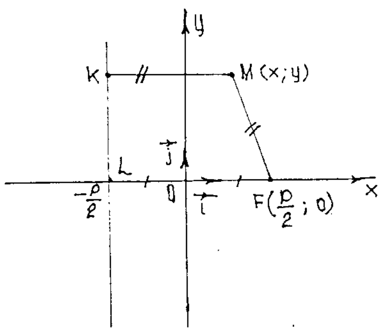
Ta’rif. Ixtiyoriy nuqtasidan berilgan nuqtagacha va berilgan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofalari o‘zaro teng bo‘lgan tekislikning barcha nuqtalari to‘plami *parabola* deyiladi. Berilgan nuqta parabolaning *fokusi*, berilgan to‘g‘ri chiziq esa parabolaning *direktrisasi* deyiladi.

Parabolaning fokusini F, direktrisasini d bilan, fokusdan direktrisagacha bo‘lgan masofani p bilan belgilaymiz.

Parabola ta’rifidan foydalanib, uning kanonik tenglamasini keltirib chiqaramiz. Buning uchun koordinatalar sistemasini tubandagicha kiritamiz. F nuqtadan o‘tuvchi va d to‘g‘ri chiziqqa perpendikular bo‘lgan to‘g‘ri chiziqni abssissalar o‘qi deb qabul qilamiz.

Abssissalar o‘qining d to‘g‘ri chiziq bilan kesishgan nuqtasi L bo‘lsin. Ordinatalar o‘qini $[FL]$ kesmaning o‘rtasidan o‘tkazamiz (41-chizma).

Tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan direktrisa $x = -\frac{p}{2}$ tenglamaga, F fokus esa $\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$ koordinatalarga ega bo‘ladi.



41-chizma.

Parabolaning ixtiyoriy nuqtasi $M(x;\ y)$ bo‘lsin. M nuqtadan direktrisaga tushirilgan perpendikularning asosini K bilan belgilaylik. U holda parabolaning ta’rifiga ko‘ra:

$$|KM| = |MF|. \qquad (*)$$

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasidan foydalansak,

$$|KM| = \sqrt{(x + p/2)^2}, \qquad (**)$$

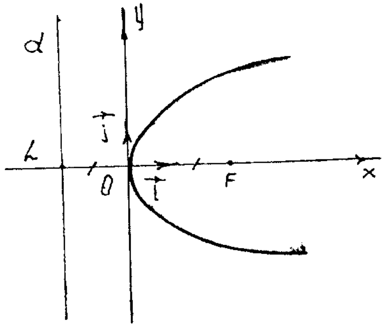
$$|MF| = \sqrt{(x - p/2)^2 + y^2}.$$

$$(*),\ (**) \Rightarrow \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2,$$

qavslarni ochib ixchamlaymiz:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

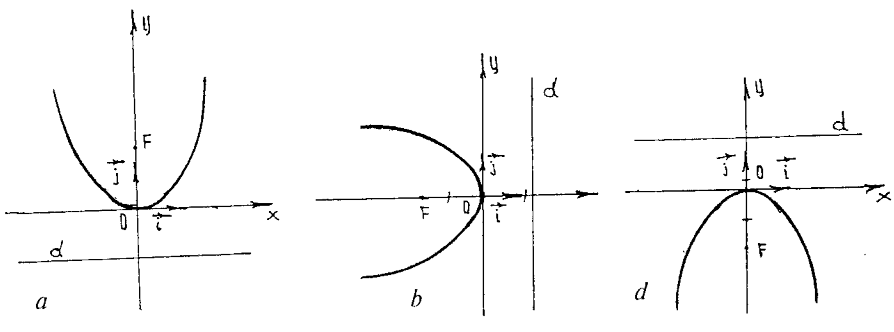
$$\text{yoki } y^2 = 2px. \qquad (12)$$



42-chizma.

(12) tenglama *parabolaning kanonik tenglamasi* deyiladi. Parabola shaklini uning (12) tenglamasiga ko'ra tekshiramiz. $y^2 \geq 0$ va $p>0$ bo'lgani uchun, (12) tenglamada $x \geq 0$ bo'lishi kerak. Bundan esa (12) tenglama bilan ifodalanuvchi parabolaning barcha nuqtalari o'ng yarim tekislikda joylashganligi kelib chiqadi. $x = 0$ da $(12) \Rightarrow y = 0$ bo'lib, parabola koordinatalar boshidan o'tadi. Koordinatalar boshi *parabolaning uchi* deyiladi. x ning har bir $x>0$ qiymatiga y ning ishoralari qarama-qarshi, ammo absolut miqdorlari teng bo'lgan ikki qiymati mos keladi. Bundan esa parabolaning Ox o'qqa nisbatan simmetrik joylashganligi ko'rinadi. Ox o'qi simmetriya o'qi. (12) tenglamadan ko'rinadiki, x ortib borishi bilan $|y|$ ham ortib boradi. Demak, yuqoridagi xossalarga ko'ra parabolaning shaklini tasavvur qilish mumkin (42-chizma). Agar parabola koordinatalar sistemasiga nisbatan 43-*a*, *b*, *d* chizmadagidek joylashgan bo'lsa, ularning tenglamalari mos ravishda $x^2 = 2py$, $y^2 = -2px$, $x^2 = -2py$ ko'rinishda bo'ladi.

M i s o l. $x + 4 = 0$ to'g'ri chiziq va $F(-2;\ 0)$ nuqtadan bir xil uzoqlikda joylashgan nuqtalar geometrik o'rnining tenglamasini tuzing.



43-chizma.

Yechish. $K(x;\ y)$ nuqta biz izlayotgan geometrik o'rinning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga asosan $|FK|=\sqrt{(x+2)^2+y^2}$, masala shartiga ko'ra $x+4=0$ to'g'ri chiziq $K(x;\ y)$ nuqtadan $|FK|=x+4$ masofada bo'ladi. Shuning uchun $(\sqrt{(x+2)^2+y^2})^2=(x+4)^2$ yoki $(x+2)^2+y^2=x^2+8x+$ $+16 \Rightarrow y^2-4x+12=0$ yoki $y^2=4x+12$; $x=\frac{1}{4}y^2-3$. Bu esa Ox o'qiga nisbatan simmetrik bo'lgan parabola tenglamasidir.

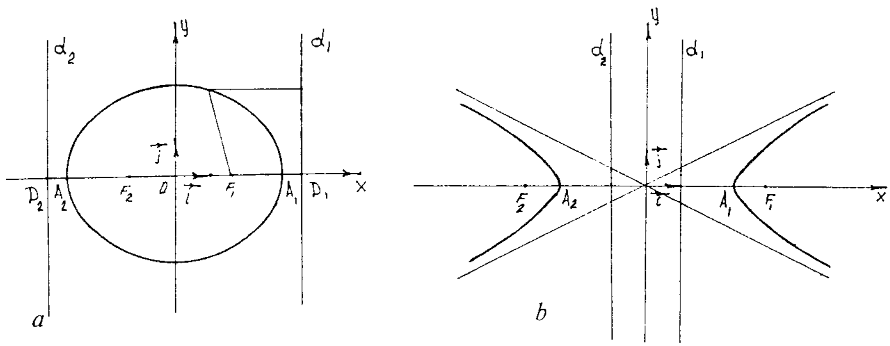
2.2.5. ELLIPS VA GIPERBOLANING DIREKTRISALARI

Ta'rif. Ellips (giperbola)ning berilgan F fokusiga mos *direktrisasi* deb uning fokal o'qiga perpendikular va markazidan shu F fokusi yotgan tomonda $\frac{a}{e}$ masofada turuvchi to'g'ri chiziqni aytiladi.

Bu yerda: a — ellips (giperbola)ning haqiqiy yarim o'qi, e — ekssentrisiteti.

F_1 va F_2 ga mos direktrisalarni d_1 va d_2 bilan belgilaymiz. Ta'rifga ko'ra direktrisalar $d_1: x-\frac{a}{e}=0$; $d_2: x+\frac{a}{e}=0$ tenglamalarga ega bo'ladi.

Ellips uchun: $e<1 \Rightarrow \frac{a}{e}>a$, giperbola uchun: $e>1 \Rightarrow \frac{a}{e}<a$, bundan esa ellipsning ham, giperbolaning ham direktrisalari ularni kesmasligi ko'rinadi (44-a, b chizmalar). Ellips (giperbola)ning direktrisalari uchun quyidagi mulohaza ham o'rinlidir. Ellips (giperbola)ning ixtiyoriy nuqtasidan fokusgacha bo'lgan masofani o'sha nuqtadan shu fokusgacha mos direktrisasigacha bo'lgan



44-chizma.

masofasiga nisbati o'zgarmas miqdor bo'lib, ellips (giperbola)ning ekssentrisitetiga teng.

M i s o l. Katta o'qi 10 ga teng bo'lgan ellipsning $x = \pm 6$ to'g'ri chiziqlar direktrisalari bo'lsa, shu ellipsning tenglamasini tuzing.

Y e c h i s h. Masala shartiga ko'ra:

$2a = 10 \Rightarrow a = 5$, ya'ni $\pm\frac{a}{e} = \pm 6$, bundan $\frac{a}{e} = \pm 6$, ammo $e = \frac{c}{e}$, u

holda $\frac{a^2}{c} = 6$ yoki

$$c = \frac{c^2}{b} = \frac{25}{6} = 4\frac{1}{6};$$

ellips uchun:

$$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - \frac{625}{36} = \frac{275}{36}.$$

Demak,

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{\frac{275}{26}} = 1.$$

2.2.6. IKKINCHI TARTIBLI EGRI CHIZIQNING UMUMIY TENGLAMASINI KANONIK KO'RINISHGA KELTIRISH

To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida koordinatalari

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0 \qquad (1)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi tekislikdagi nuqtalarining geometrik o'rni *ikkinchi tartibli egri chiziq* deyiladi.

Bunda a_{ij} koeffitsiyentlar haqiqiy sonlardan iborat bo'lib, a_{11}, a_{12}, a_{22} koeffitsiyentlardan hech bo'lmaganda bittasi noldan farqli bo'ladi.

Ta'rifga ko'ra ikkinchi tartibli egri chiziq koordinatalar sistemasiga bog'liq bo'lmasa-da, uning a_{ij} koeffitsiyentlari koordinatalar sistemasiga bog'liq.

Ikkinchi tartibli egri chiziq nazariyasining asosiy masalalaridan biri, uning umumiy tenglamasini kanonik ko'rinishga keltirish hisoblanadi.

Ikkinchi tartibli egri chiziqni soddalashtirish ikki bosqichdan iborat.

1) koordinatalar sistemasini burish yordamida soddalashtirish.

Agar ikkinchi tartibli egri chiziq biror R to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasida (1) tenglama bilan berilgan bo‘lsa, u holda bu koordinatalar sistemasini burish yordamida shunday bir R' to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasiga o‘tish mumkinki, u sistemada egri chiziq o‘z tenglamasida o‘zgaruvchilar ko‘paytmasini, ya’ni xy ni saqlamaydi (bu bosqich $a_{12}\neq 0$ holda qo‘llaniladi).

Buning uchun o‘tish formulalari

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases} \tag{2}$$

dan x, y larni (1) ga qo‘ysak va o‘xshash hadlarni ixchamlasak, (1) tenglama R' koordinatalar sistemasida quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a'_{00} = 0, \tag{3}$$

bu yerda:

$$\begin{cases} a'_{11} = a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\cos\alpha\sin\alpha + a_{22}\sin^2\alpha, \\ a'_{12} = -a_{11}\sin\alpha\cos\alpha + a_{12}\cos^2\alpha - a_{12}\sin^2\alpha + a_{22}\sin\alpha\cos\alpha, \\ a'_{22} = a_{11}\sin^2\alpha - 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}\cos^2\alpha, \\ a'_{10} = a_{11}\cos\alpha + a_{20}\sin\alpha, \\ a'_{20} = -a_{10}\sin\alpha + a_{20}\cos\alpha, \\ a'_{00} = a_{00}. \end{cases} \tag{4}$$

(4) belgilashlardan ko‘rinadiki, (3) tenglamadagi a'_{11}, a'_{12}, a'_{22} koeffitsiyentlar (1) tenglamadagi a_{11}, a_{12}, a_{22} koeffitsiyentlarga va α burchakka bog‘liq, shuning bilan birga a'_{11}, a'_{12}, a'_{22} larning kamida biri noldan farqli, aks holda birinchi tartibli tenglamaga ega bo‘lamiz.

α burchak ixtiyoriyligidan foydalanib, uni shunday tanlab olamizki, natijada (3) tenglamadagi a'_{12} koeffitsiyent nolga teng bo‘lsin:

$$a'_{12} = -a_{11}\sin\alpha\cos\alpha + a_{12}\cos^2\alpha - a_{12}\sin^2\alpha + a_{22}\sin\alpha\cos\alpha =$$
$$= -(a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha)\sin\alpha + (a_{21}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha)\cos\alpha = 0$$

yoki

$$\frac{a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a_{21}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha}{\sin\alpha}. \tag{5}$$

(5) munosabatni biror λ ga tenglab, uni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha = 0, \\ a_{21}\cos\alpha + (a_{22}-\lambda)\sin\alpha = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Bu sistema bir jinsli, shuning uchun uning determinanti nolga teng, ya'ni

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{yoki} \quad \lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12})^2 \tag{7}$$

bo'lganidagina sistema noldan farqli yechimga ega bo'ladi.

(7) tenglama (1) chiziqning *xarakteristik tenglamasi* deyiladi. (7) tenglamaning diskriminanti:

$$D = (a_{11}+ a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22}- a_{12})^2 = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 > 0.$$

Demak, (7) tenglamaning λ_1 va λ_2 ildizlari turli xil va haqiqiydir. (5) dan

$$\begin{cases} a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha = \lambda\cos\alpha, \\ a_{21}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha = \lambda\sin\alpha \end{cases} \tag{8}$$

tengliklarni yoza olamiz. Ularning har birini $\cos\alpha\neq 0$ ga bo'lib (agar $\cos\alpha=0 \Rightarrow a=\frac{\pi}{2}$ bo'lsa, $a_{12}=0$ bo'ladi), ushbuni hosil qilamiz:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\lambda-a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{\lambda-a_{22}}; \tag{9}$$

(9) munosabatga navbat bilan (7) xarakteristik tenglamaning λ_1, λ_2 ildizlarini qo'yamiz:

$$\mathrm{tg}\alpha_1 = \frac{\lambda_1-a_{11}}{a_{12}}; \quad \mathrm{tg}\alpha_2 = \frac{\lambda_2-a_{11}}{a_{12}}. \tag{10}$$

(10) formulalardan foydalanib $\alpha=\alpha_1$ burchakni aniqlab, R koordinatalar sistemasini shu α_1 burchakka burish bilan yangi R' koordinatalar sistemasiga o'tish mumkinki, bu sistemaga nisbatan (1) tenglama soddalashib quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a'_{00} = 0. \tag{11}$$

Agar berilgan (1) tenglamada $a_{10}=a_{20}=0$ bo'lsa, u holda $a'_{10}=a'_{20}=0$ bo'lib, (3) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+a'_{00}=0. \qquad (12)$$

Shunday qilib, koordinatalar sistemasini burish yordamida (1) tenglamani (11) ko'rinishdagi tenglamaga keltirdik. (11) ko'rinishdagi tenglamani yanada soddalashtirish uchun koordinatalar boshini ko'chirishdan foydalanamiz;

2) koordinatalar boshini ko'chirish yo'li bilan ikkinchi tartibli egri chiziq tenglamasini soddalashtirish (bu holda koordinatalar sistemasini o'qlari yo'nalishini o'zgartmasdan, koordinatalar boshini boshqa nuqtaga ko'chiramiz, ya'ni R'' koordinatalar sistemasiga o'tamiz).

Ikkinchi tartibli egri chiziqning tenglamasi (11) ko'rinishda bo'lsin. (7) xarakteristik tenglamaning ildizlari λ_1 va λ_2 bir vaqtda nolga teng bo'lmasin.

Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $\lambda_1\neq 0,\ \lambda_2\neq 0 \Leftrightarrow a_{11}a_{22}-a_{12}^2\neq 0.$

Bu holda (11) tenglamada quyidagicha shakl almashtirish bajaramiz:

$$\lambda_1\left(x'+\frac{a'_{10}}{\lambda_1}\right)^2+\lambda_2\left(y'+\frac{a'_{20}}{\lambda_2}\right)^2+a''_{00}=0,$$

bu yerda $a''_{00}=\frac{a'^2_{10}}{\lambda_1}-\frac{a'^2_{20}}{\lambda_2}$ deb belgilaymiz.

Tubandagi shakl almashtirishni bajaramiz:

$$x'=X+\left(-\frac{a'_{10}}{\lambda_1}\right);\quad y'=Y+\left(-\frac{a'_{20}}{\lambda_2}\right).$$

U holda R'' koordinatalar sistemasida egri chiziq quyidagi tenglamaga ega bo'ladi:

$$\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2+a''_{00}=0, \qquad (13)$$

bu yerda $o'\left(-\frac{a'_{10}}{\lambda 1};\ -\frac{a'_{20}}{\lambda_2}\right)$; agar $a''_{00}\neq 0$ bo'lsa, (13) ni kanonik ko'rinishda yozish mumkin: $\frac{X^2}{-\frac{a''_{00}}{\lambda_1}}+\frac{Y^2}{-\frac{a''_{00}}{\lambda_2}}=1.$

Agar $a''_{00} \neq 0$ bo'lsa, uning kanonik ko'rinishi tubandagicha bo'ladi:

$$\frac{X^2}{\frac{1}{\lambda_1}} + \frac{Y^2}{\frac{1}{\lambda_2}} = 0.$$

Shunday qilib, R koordinatalar sistemasida (1) tenglama bilan berilgan ikkinchi tartibli egri chiziqning xarakteristik tenglama ildizlari λ_1 va λ_2 lar nolga teng bo'lmasalar, u holda egri chiziq quyidagi chiziqlardan bittasini ifodalaydi:

№	λ_1	λ_2	a''_{00}	Kanonik tenglamasi	Chiziqning nomi
1.	+ –	+ –	– +	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Ellips
2.	+ –	+ –	+ –	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	Mavhum ellips
3.	+ –	+ –	0	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	Nuqta (kesishuvchi mavhum to'g'ri chiziqlar jufti)
4.	+ –	– +	$\neq 0$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$	Giperbola
5.	+ –	– +	0	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	Kesishuvchi to'g'ri chiziqlar jufti

b) $\lambda_1 = 0$, $(\lambda_2 \neq 0)$, $a'_{10} = 0$.

Bu holda (11) tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$\lambda_2 \left(y' + \frac{a'_{20}}{\lambda_2} \right)^2 + 2a'_{10} \left(x' - \frac{a'^2_{20} \cdot 1 / \lambda_2 - a''_{00}}{2a'_{10}} \right)^2 = 0.$$

Quyidagi koordinata almashtirish formulasini qo'llasak:

$$x' = X + \frac{a'^2_{20} \cdot 1 / \lambda_2 - a''_{00}}{2a'_{10}}; \qquad y' = Y + \left(-\frac{a'_{20}}{\lambda_2} \right)$$

(11) tenglamadan egri chiziqning R'' dagi kanonik tenglamasi kelib chiqadi:

$$\lambda^2 Y^2 + 2a'_{10} X = 0; \quad y^2 = -2\frac{a'_{10}}{\lambda_2} X. \tag{14}$$

Agar $\lambda_2 = 0$; $a'_{20} \neq 0$ bo'lsa, u holda (11) ning ko'rinishi tubandagicha bo'ladi:

$$X^2 = -2\frac{a'_{20}}{\lambda_1} Y.$$

Shunday qilib, agar $\lambda_1 = 0$ bo'lib, $a'_{10} \neq 0$ bo'lsa yoki $\lambda_2 = 0$ bo'lib, $a'_{20} \neq 0$ bo'lsa, u holda (1) tenglama parabolani ifodalar ekan.

d) $\lambda_1 = 0$; $a'_{10} \neq 0$.

U holda $(11) \Rightarrow \lambda_2 \left(y' + \frac{a'_{20}}{\lambda_2}\right)^2 + a''_{00} - \frac{a'^2_{20}}{\lambda_2} = 0$;

$a'_{00} - \frac{a'^2_{20}}{\lambda_2}$ ni a''_{00} bilan belgilasak va quyidagicha $x' = X$; $y' = Y + \left(-\frac{a'_{20}}{\lambda_2}\right)$

koordinata almashtirish formulasini qo'llasak, (11) tenglama R'' koordinatalar sistemasida quyidagi ko'rinishni oladi:

$$Y^2 + \frac{a'_{00}}{\lambda_2} = 0. \tag{15}$$

Bunda agar $\frac{a'_{00}}{\lambda_2} < 0$ bo'lsa va uni $\frac{a'_{00}}{\lambda_2} = -a^2$ deb belgilasak, (15) ni quyidagicha yozamiz:

$$Y^2 - a^2 = 0 \Rightarrow Y - a = 0; \ Y + a = 0. \tag{16}$$

Demak, egri chiziq har xil parallel to'g'ri chiziqlar juftiga ajraladi, agar $\frac{a'_{00}}{\lambda_2} > 0$ bo'lsa, ya'ni $\frac{a'_{00}}{\lambda_2} = a^2$ bo'lsa u holda

$$Y^2 + a^2 = 0 \Rightarrow Y + ai = 0; \ Y - ai = 0 \tag{17}$$

bo'ladi.

Bu holda egri chiziq mavhum parallel to'g'ri chiziqlar juftiga ajraladi.

Agar $a''_{00} = 0$ bo'lsa,

$$(15) \Rightarrow Y^2 = 0 \Rightarrow Y = 0; \ Y=0 \tag{18}$$

bo'ladi. Bu holda egri chiziq ustma-ust tushuvchi to'g'ri chiziqlar juftini ifodalaydi. Shunday qilib, (1) tenglama quyidagi 9 ta chiziqning bittasini ifodalaydi:

1) ellipsni;
2) giperbolani;
3) parabolani;
4) kesishuvchi to'g'ri chiziqlar juftini;

5) har xil parallel to'g'ri chiziqlar juftini;
6) ustma-ust tushuvchi to'g'ri chiziqlar juftini;
7) mavhum ellipsni;
8) mavhum kesishuvchi to'g'ri chiziqlar juftini;
9) mavhum parallel to'g'ri chiziqlar juftini.

2.2.7. IKKINCHI TARTIBLI CHIZIQNI UMUMIY TENGLAMASIGA KO'RA YASASH

Faraz qilaylik, R to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida ikkinchi tartibli chiziqning umumiy tenglamasi

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0 \quad (1)$$

bilan berilgan bo'lsin. Oldingi mavzudagi umumiy tenglamani kanonik ko'rinishga keltirishga asosan chiziqning nuqtalarini tuzish mumkin. Buning uchun tubandagilarni bajaramiz:

1) $\lambda_2-(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ xarakteristik tenglamani yozib, tenglamaning ildizlarini topamiz;

2) tekislikni 0 nuqta atrofida α burchakka burganda R koordinatalar sistemasidan R' koordinatalar sistemasi hosil bo'ladi. Burish burchagining kattaligini topamiz:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} \Rightarrow \left(\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}\alpha^2}};\ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}\alpha^2}} \right);$$

3) $a'_{10} = a_{10}\cos\alpha + a_{20}\sin\alpha,$
$a'_{20} = -a_{10}\sin\alpha + a_{20}\cos\alpha$

formulalar bo'yicha a'_{10}, a'_{20} koeffitsiyentlarni hisoblaymiz va R' koordinatalar sistemasidagi chiziqning

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a'_{00} = 0 \quad (2)$$

tenglamasini tuzamiz;

4) (2) tenglamadan, boshini O' nuqtaga ko'chirish yordamida egri chiziqning R'' koordinatalar sistemasidagi tenglamasini hosil qilamiz.

5) R' koordinatalar sistemasi chiziladi, keyin R'' koordinatalar sistemasi chiziladi, keyin egri chiziq kanonik tenglamasiga ko'ra yasaladi.

1-misol. $x^2 - 8xy + 7y^2 + 5x - 6y + 7 = 0$ egri chiziq tenglamasini soddalashtiring.

Yechish. 1) xarakteristik tenglamasini tuzib, uning ildizlarini aniqlaymiz:

$$\lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0; \quad \lambda_1 = 9; \lambda_2 = -1;$$

2) koordinatalar sistemasini burish kerak bo'lgan burchakning qiymatini topamiz:

$$\mathrm{tg}\alpha = -2; \quad \sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}; \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Bunda α jadvaldan topiladi. Koordinata o'qlaridagi vektorlar quyidagicha bo'ladi:

$$\vec{i} = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}; \qquad \vec{j} = \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j};$$

3) koeffitsiyentlarni aniqlaymiz:

$$a'_{10} = \frac{17}{\sqrt{5}}; \quad a'_{20} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Yangi koordinatalar sistemasiga nisbatan tenglama tuzamiz:

$$9x'^2 - y'^2 + 2\frac{17}{\sqrt{5}}x' + \frac{4}{\sqrt{5}}y' + 7 = 0;$$

4) koordinatalar boshini O' nuqtaga ko'chirish yo'li bilan tenglama shaklini o'zgartiramiz:

$$9\left(x' + \frac{17}{9\sqrt{5}}\right)^2 - \left(y' + \frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{34}{9} = 0.$$

U holda tubandagi tenglamaga ega bo'lamiz:

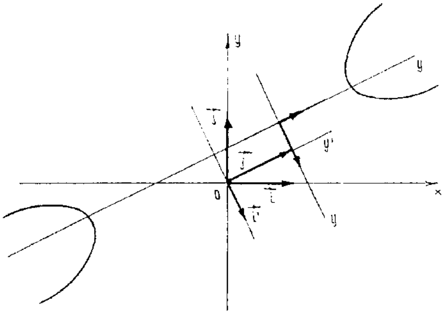
$$-\frac{X^2}{\frac{34}{81}} + \frac{Y^2}{\frac{34}{9}} = 1; \qquad O'\left(-\frac{17}{9\sqrt{5}};\ \frac{4}{\sqrt{5}}\right).$$

Demak, egri chiziq giperboladan iborat ekan (45-chizma).

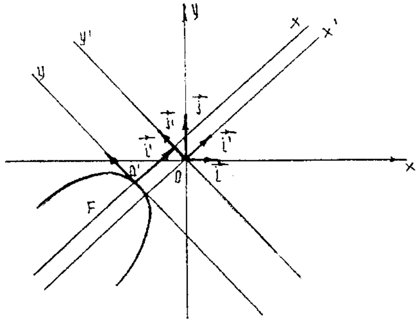
2-misol. $x^2 - 2xy + y^2 - 3x - 4y + 2 = 0$ egri chiziq tenglamasini soddalashtiring.

Yechish. 1) xarakteristik tenglama tuzib, uning ildizlarini aniqlaymiz: $\lambda^2 - 2\lambda = 0$; $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 2$;

2) koordinata o'qlarini burish kerak bo'lgan burchakning qiymatini topamiz:



45-*chizma.*



46-*chizma.*

$$\operatorname{tg}\alpha = 1;\ \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}};\ \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\vec{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}; \qquad \vec{j} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j};$$

3) koeffitsiyentlarni aniqlaymiz:

$$a'_{10} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad a'_{20} = -\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$2y'^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}x' - \frac{2}{\sqrt{2}}y' + 2 = 0$$

yoki

$$y'^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' + 1 = 0;$$

4) koordinatalar boshini O' nuqtaga ko‘chirish yo‘li bilan tenglamani soddalashtiramiz:

$$\left(y' - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x' + \frac{7}{4\sqrt{2}}\right)^2 = 0,$$

bundan

$$y^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x; \qquad O'\left(-\frac{7}{4\sqrt{2}};\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2$$

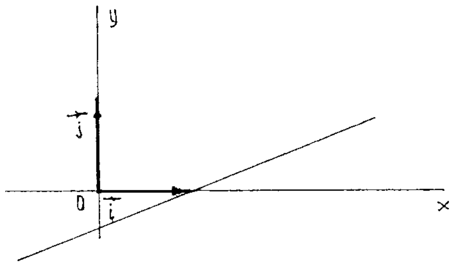
tenglamaga ega bo‘lamiz.

Demak, egri chiziq paraboladan iborat ekan (46-chizma).

3-m i s o l. $x^2-6xy + 9y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$ egri chiziq tenglamasini soddalashtiring.

Y e c h i s h. Berilgan tenglamani tubandagicha yozish mumkin:

$$(x-3y)^2 - 2(x-3y) + 1 = 0,$$



47-chizma.

$$x - 3y = 1 \text{ yoki } y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3},$$

bundan ko‘rinadiki, berilgan egri chiziq ustma-ust tushuvchi to‘g‘ri chiziqlar juftiga ajraladi (47-chizma).

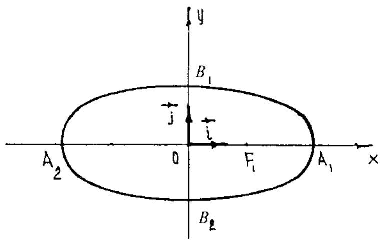
2.2.8. IKKINCHI TARTIBLI EGRI CHIZIQLARNING QO‘LLANILISHI

Osmon jismlarining trayektoriyalarini o‘rganishda ikkinchi tartibli egri chiziqlar bilan ish ko‘riladi, chunki planetalar Quyosh atrofida elliptik orbitalar bo‘ylab, Quyosh sistemasidagi kometalar esa, yoki ellips, yoki giperbola, yoki parabola bo‘ylab harakatlanadilar. Shuningdek, texnikada krivoship-shatun mexanizmida, shatunning o‘rtasida yotuvchi nuqta trayektoriyasini tekshirsak, u ellips bo‘yicha harakatlanadi, avtomobil farasining kesimi parabola shaklida ishlanadi. Umuman aytganda, ikkinchi tartibli egri chiziqlar nazariyasi amaliyot va texnikada keng qo‘llaniladi.

1 - m i s o l . Yer Quyosh atrofida ellips bo‘yicha aylanadi. Quyosh esa bu ellipsning bitta fokusiga joylashgan bo‘ladi. Yer orbitasining katta o‘qi $2a = 300\,000\,000$ km. Orbitaning ekssentrisiteti $e = \frac{1}{60}$; Yer orbitasining markazi Quyoshdan qancha masofada yotadi? Quyoshdan Yergacha eng kichik masofa (dekabrda) eng katta masofadan (iyunda) qancha qisqa?

Y e c h i s h. Masala shartiga ko‘ra $2a = 300\,000\,000$ km, bundan $a = 150\,000\,000$ km.

1) Yer orbitasining markazi Quyoshdan qancha masofada yotishini bilish uchun fokus masofasini topsak yetarli, chunki, Quyosh uning bir fokusida joylashgan, aniqlik uchun F_1 da joylashgan bo‘lsin (48-chizma).



48-chizma.

Ekssentrisitet ta’rifiga asosan:

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a \cdot e\,,$$

$$c = 150\,000\,000 \cdot \frac{1}{60} = 2500\,000 \text{ km}$$

masofada ekan.

Yer orbitasining markazi Quyoshdan 2 500 000 km masofada ekan.

2) eng kichik masofani, ya'ni F_1A ni topamiz.

$F_1A = a - c = 150\ 000\ 000 - 2\ 500\ 000 = 147\ 500\ 000$ km.

Eng katta masofani, ya'ni A_2F ni topamiz.

$A_2F = a + c = 150\ 000\ 000 + 2\ 500\ 000 = 152\ 500\ 000$ km.

Quyoshdan Yergacha eng kichik masofa eng katta masofadan qancha kichik ekanligini topamiz. Agar bu masofani ρ desak,

$\rho = A_2F - F_1A = 152\ 000\ 000 - 147\ 500\ 000 = 5\ 000\ 000$ km.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak uchun formula keltirib chiqaring.
2. Ikki to'g'ri chiziqning perpendikularlik va parallellik shartlari nimadan iborat?
3. Tekislikda nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa formulasini keltirib chiqaring.
4. Qanday chiziq ellips deyiladi? Uning kanonik tenglamasini keltirib chiqaring.
5. Qanday nuqtaga ellips markazi, qanday nuqtalarga ellips uchlari deyiladi?
6. Qanday chiziq giperbola deb ataladi? Uning kanonik tenglamasini keltirib chiqaring.
7. Giperbolaning markazi va uchlari deb qanday nuqtalarga aytiladi?
8. Ellips va giperbolaning ekssentrisiteti deb nimaga ataladi? Ularni ifodalovchi formulalarni yozing.
9. Giperbolaning direktrisasi nima? Giperbolaning fokuslari qayerda yotadi?
10. Giperbolaning asimptotalari nima?
11. Parabolaga ta'rif bering. Uning kanonik tenglamasini yozing.
12. Parabolaning fokusi va direktrisasi nima? Ular qanday xossa bilan bog'langan?

3-bob. FAZODA TEKISLIK VA TO‘G‘RI CHIZIQ

3.1. TEKISLIK

3.1.1. TEKISLIKNING BERILISH USULLARI

1) tekislik o‘zining biror $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nuqtasining va normalining berilishi bilan fazoda bir qiymatli aniqlanadi. Tekislikka perpendikular bo‘lgan $\vec{a} \neq 0$ vektorni tekislikning *normali* deyiladi. Tekislik tenglamasini aniqlash uchun Dekart koordinatalar sistemasini tanlaymiz. $\{A, B, C\}$ — normal $\vec{n}$ ning shu sistemadagi koordinatalari, $(x_0; y_0; z_0)$ esa Π tekislik M_0 nuqtasining shu sistemadagi koordinatalari bo‘lsin. $M(x; y; z)$ — fazoning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin. M nuqta Π tekislikka tegishli bo‘lishi uchun $\overrightarrow{M_0M}$ vektor $\vec{n}$ vektorga perpendikular bo‘lishi, ya’ni $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$ bo‘lishi zarur va yetarli. $\overrightarrow{M_0M}$ vektor $\{x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0\}$ koordinatalarga ega bo‘lgani uchun

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Demak, Π tekislik M nuqtasining koordinatalari

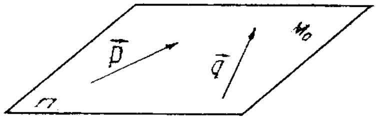
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \tag{1}$$

tenglamani qanoatlantiradi.

$\vec{n} \neq 0$ bo‘lgani uchun $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Endi (1) tenglamani har qanday $x_1; y_1; z_1$ yechimi Π tekislikning biror nuqtasini aniqlashini isbotlaymiz. Haqiqatan ham, M_1 nuqta $x_1; y_1; z_1$ koordinatalarga ega bo‘lsin, u holda $\overrightarrow{M_0M_1}$ vektor $\{x_1 - x_0;\ y_1 - y_0;\ z_1 - z_0\}$ koordinatalarga ega bo‘ladi va (1) munosabat o‘rinli bo‘lgani uchun $\overrightarrow{M_0M_1}$ vektor $\vec{n}$ vektorga perpendikular bo‘ladi.

2) tekislik o‘zining biror $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nuqtasining va tekislikka parallel bo‘lgan ikkita nokollinear $\vec{p} = \{\alpha_1; \beta_1; \gamma_1\}$, $\vec{q} = \{\alpha_2; \beta_2; \gamma_2\}$ vektorlarning berilishi bilan aniqlanadi.

Tekislikda ixtiyoriy $M(x;\ y;\ z)$ nuqtani olamiz. U holda $\overrightarrow{M_0M}$ vektor $\vec{p}$, $\vec{q}$ vektorlar bilan komplanar bo'ladi, demak, bu vektorlar chiziqli bog'liq bo'lib, bundan ularning koordinatalaridan tuzilgan uchinchi tartibli determinant nolga teng bo'lib chiqadi (49-chizma). Vektorlarni koordinatalarda yozaylik:



49-chizma.

$$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0\};$$

$$\vec{p} = \{\alpha_1;\ \beta_1;\ \gamma_1\},$$

$$\vec{q} = \{\alpha_2;\ \beta_2;\ \gamma_2\},$$

u holda quyidagi tenglama hosil bo'ladi:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

Aksincha, (2) shart bajarilsa, M nuqta π tekislikka tegishli bo'ladi. Demak, (2) Π ning tenglamasi. Bu tenglama berilgan nuqtadan o'tib, berilgan nokollinear *ikki vektorga parallel bo'lgan tekislikning tenglamasi* deb ataladi.

$\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$ vektorlar bir tekislikda yotgani uchun, ular chiziqli bog'liqdir, ya'ni

$$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{q} + n\vec{q},\ t,\ n \in \mathrm{R}, \qquad (3)$$

bu yerda t, n sonlar parametrlardir, (3) dan:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 n, \\ y &= y_0 + \beta_1 t + \beta_2 n, \\ z &= z_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 n. \end{aligned} \qquad (4)$$

(4) tekislikning *parametrik tenglamalari* deyiladi.

3) bir tekislikda yotgan uchta nuqta tekislikning vaziyatini to'la aniqlaydi. Aytaylik, uchta $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $M_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$ nuqtalar berilgan bo'lsin. Tekislik tenglamasini tuzaylik.

Agar biz $M_0 = M_1$; $\overrightarrow{P_1} = M_1M_2$; $\overrightarrow{P_2} = M_1M_3$ desak hamda $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}$, $\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1;\ y_3 - y_1;\ z_3 - z_1\}$larni e'tiborga olsak, (2) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

(5) — uch nuqtadan o'tgan tekislik tenglamasini ifodalaydi.

4) tekislik o'zining koordinata o'qlaridan kesgan kesmalari a, b, c larning berilishi bilan aniqlanadi. Aytaylik, tekislik koordinatalar boshidan o'tmasin va u Ox, Oy, Oz o'qlarini mos ravishda $M_1(a;\ 0;\ 0)$, $M_2(0;\ b;\ 0)$, $M_3(0;\ 0;\ c)$ nuqtalarda kessin.

U holda (5) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{vmatrix} x - a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0,$$

bundan

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \tag{6}$$

(6) — tekislikning *koordinata o'qlaridan ajratgan kesmalari bo'yicha tenglamasi* deb ataladi.

Yuqorida ko'rib o'tilgan tekislik tenglamalari birinchi darajali bo'lib,

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{7}$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Shuning uchun (7) ko'rinishdagi tenglamaga tekislikning *umumiy tenglamasi* deyiladi. Bunda A, B, C lar bir vaqtda nolga teng emas.

Tekislikni umumiy tenglamasiga ko'ra tekshirish

Tekislikning umumiy tenglamasi (7) ga ko'ra tekislikning koordinata o'qlariga nisbatan joylashuvi to'g'risida fikr yuritamiz:

a) agar $D = 0$ bo‘lsa, (7) tekislik koordinatalar boshidan o‘tadi;

b) agar $A = 0$ bo‘lsa, (7) tekislik Ox o‘qiga parallel, $B = 0$ bo‘lsa, $0y$ o‘qiga parallel, $C = 0$ bo‘lsa, tekislik Oz o‘qiga parallel bo‘ladi.

Shuningdek,

$$A = 0 \Leftrightarrow \Pi \| Ox, \quad A = D = 0 \Leftrightarrow \pi \supset Ox,$$

$$B = 0 \Leftrightarrow \Pi \| Oy, \quad B = D = 0 \Leftrightarrow \pi \supset Oy,$$

$$B = 0 \Leftrightarrow \Pi \| Oz, \quad C = D = 0 \Leftrightarrow \pi \supset Oz;$$

d) agar $A = B = 0$, $C \neq 0$ bo‘lsa, $\Pi \,||\, (xOy)$.

Xususiy holda $D = 0$ bo‘lsa, $z = 0$, ya’ni xOy tekislik tenglamasiga ega bo‘lamiz. Shunga o‘xshash $x = a$ yOz tekisligiga parallel Π tekislikni ifodalaydi. $x = 0$ yOz tekislikning o‘zini ifodalaydi. $y = b$ esa $\Pi \,||\, xOz$ tekislikni, $y = 0$ bo‘lsa xOz tekislikning o‘zini ifodalaydi (50-*a*, *b*, *d* chizmalar).

1-misol. $M(2; -3; 4)$ nuqta orqali o‘tuvchi va $\vec{n} = \{1; -1; 4\}$ vektorga perpendikular bo‘lgan tekislikning tenglamasini tuzing.

Yechish. Bizga ma’lumki, berilgan $M_1(x_1; y_1; z_1)$ nuqtadan o‘tib, $\vec{n} = \{A; B; C\}$ vektorga perpendikular bo‘lgan tekislikning tenglamasi

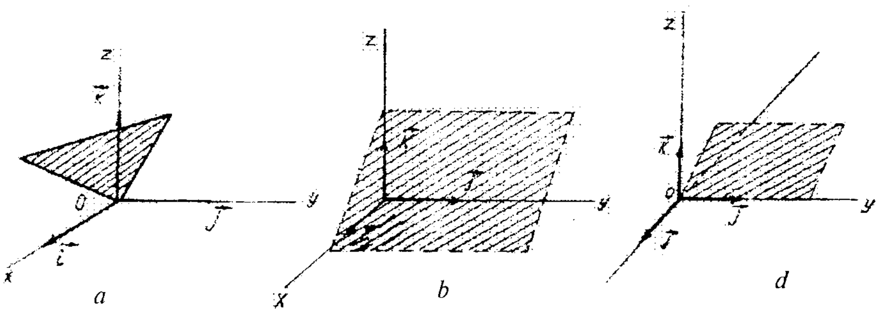
$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

ko‘rinishda edi. Masala shartidan $x_1 = 2$; $y_1 = -3$; $z_1 = 4$; $A = 1$; $B = -1$; $C = 4$.

Bularni tenglamaga qo‘ysak:

$$1 \cdot (x - 2) - 1 \cdot (y + 3) + 4 \cdot (z - 4) = 0 \Rightarrow x - 2 - y - 3 + 4z - \\ - 16 = 0 \Rightarrow x - y + 4z - 21 = 0.$$

Bu izlangan tekislik tenglamasi.



50-chizma.

2-misol. Tekislik $A(2; 2; 3)$ nuqtadan o'tib, $\vec{p} = \{1; 2; 1\}$, $\vec{q} = \{2; 4; 3\}$ vektorlarga parallel bo'lsin. Shu tekislikning parametrik va umumiy tenglamalarini tuzing.

Yechish. Berilganlarni (2) tenglama bilan solishtiramiz:

$$\begin{aligned} x_0 &= 2; & y_0 &= 2; & z_0 &= 3, \\ \alpha_1 &= 1; & \beta_1 &= 2; & \gamma_1 &= 1, \\ \alpha_2 &= 2; & \beta_2 &= 4; & \gamma_2 &= 3, \end{aligned}$$

bularni (2) ga qo'ysak,

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Uchinchi tartibli determinantni ochib ixchamlasak, tekislikning umumiy tenglamasiga ega bo'lamiz:

$$x - y + z - 3 = 0.$$

Bu tenglama — izlangan tekislikning umumiy tenglamasi.

3-misol. $2x + 3y - 5z - 30 = 0$ tekislik berilgan. Bu tekislikning koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalari koordinatalarini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani tekislikning koordinata o'qlaridan kesgan kesmalari bo'yicha tenglamasi ko'rinishiga keltiramiz:

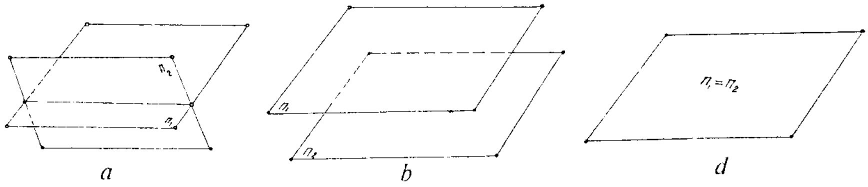
$$\frac{2x}{30} + \frac{3y}{30} - \frac{5z}{30} = 1 \quad \text{yoki} \quad \frac{x}{15} + \frac{y}{10} - \frac{z}{6} = 1.$$

Demak, tekislik Ox o'qini $(15; 0; 0)$, Oy o'qini $(0; 10; 0)$, Oz o'qini $(0; 0; -6)$ nuqtalarda kesadi.

3.1.2. FAZODA IKKITA VA UCHTA TEKISLIKNING O'ZARO JOYLASHUVI

1. Aytaylik, Dekart koordinatalar sistemasida ikkita Π_1 va Π_2 tekisliklar o'zlarining tenglamalari bilan berilgan bo'lsin:

$$\Pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \tag{1}$$
$$\Pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \tag{2}$$



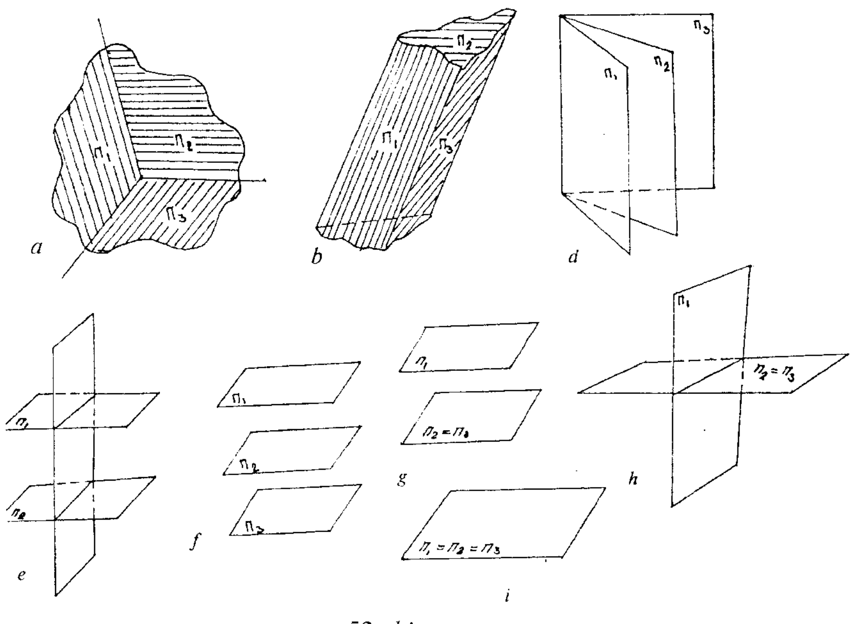
51-chizma.

Bu ikki tekislik to'g'ri chiziq orqali kesishadi yoki ular o'zaro parallel bo'lib, umumiy nuqtaga ega emas yoki ustma-ust tushadi (51-*a*, *b*, *d* chizma). Bu hollarning qaysi biri yuz berishini bilish uchun Π_1, Π_2 ga tegishli tenglamalar sistemasini tekshirish kerak (bu matritsalar yordamida tekshiriladi).

2. Aytaylik, Dekart koordinatalar sistemasida uchta tekislik o'zining tenglamalari bilan berilgan bo'lsin:

$$\Pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \tag{3}$$
$$\Pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \tag{4}$$
$$\Pi_3 : A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \tag{5}$$

Bu uchta tekislikning fazoda o'zaro joylashuvida 8 ta hol ro'y berishi mumkin (52-chizma).



52-chizma.

1) uchta tekislik bitta umumiy nuqtaga ega;

2) tekisliklar juft-juft kesishadi, ammo umumiy nuqtaga ega emas;

3) uchta tekislik bitta to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadi;

4) ikkita tekislik o'zaro parallel bo'lib, uchinchi tekislik ularni kesadi;

5) uchta tekislik o'zaro parallel joylashgan bo'ladi;

6) ikkita tekislik ustma-ust tushadi va uchinchi tekislik ularni kesadi;

7) ikkita tekislik ustma-ust tushadi va uchinchi tekislik ularga parallel bo'ladi;

8) uchta tekislik ham ustma-ust tushadi.

Bu hollardan qaysi biri yuz berishini bilish uchun Π_1, Π_2, Π_3 ga tegishli tenglamalar sistemasini tekshirish kerak (bu ham matritsalar yordamida tekshiriladi).

M i s o l: $2x + y = 5$, $x + 3z = 16$ va $5y - z = 10$ tekisliklarning kesishmasini aniqlang.

Y e c h i s h. Bu tekisliklarning kesishmasini aniqlash uchun quyidagi sistemaning yechimini aniqlaymiz:

$$\begin{cases} 2x + y = 5, \\ x + 3z = 16, \\ 5y - z = 10. \end{cases}$$

Bu sistemalar uchun quyidagi determinantlarni tuzamiz va ularni hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -30 + 1 = -29;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 3 \\ 10 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 16 & 3 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -75 + 46 = -29; \quad x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-29}{-29} = 1;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 16 & -1 \\ 0 & 10 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 16 & 3 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -92 + 5 = -87; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-87}{-29} = 3;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 16 \\ 0 & 5 & 10 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 16 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= -160 + 15 = -145; \; z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-145}{-29} = 5.$$

Demak, tekisliklar (1; 3; 5) nuqtada kesishadi.

3.1.3. IKKI TEKISLIK ORASIDAGI BURCHAK

Fazoda Dekart koordinatalar sistemasida kesishuvchi ikki tekislik o'zining tenglamalari bilan berilgan bo'lsin:

$$\Pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \tag{1}$$

$$\Pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \tag{2}$$

Ikki tekislik kesishganda to'rtta ikki yoqli burchak hosil bo'lib, ulardan o'zaro vertikal bo'lganlari teng (53-chizma). Demak, ikkita har xil burchak hosil bo'lib, bularning biri ikkinchisini to'ldiradi. Shuning uchun shu ikki burchakdan birini topsak yetarli. Ikki yoqli bu ikki burchakdan birining chiziqli burchagi berilgan tekislikning $\vec{n}_1 = \{A_1;\ B_1;\ C_1\}$ va $\vec{n}_2 = \{A_2;\ B_2;\ C_2\}$ normal vektorlari orasidagi burchakka teng bo'ladi. $\vec{n}_1$ va $\vec{n}_2$ orasidagi burchakni φ desak,

$$\cos\varphi = \cos(\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \tag{3}$$

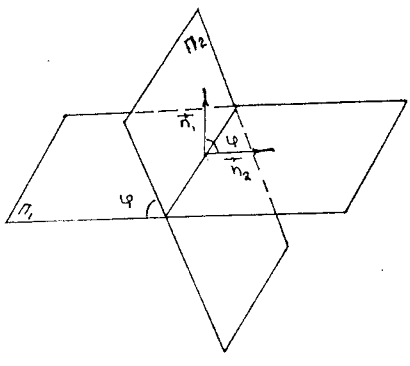
formuladan xususiy holda ikkita tekislikning perpendikularlik sharti kelib chiqadi, ya'ni $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$, ya'ni $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Ushbu

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

yoki $A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2$ (4)

tengliklar esa ikki tekislikning parallellik shartlarini ifodalaydi.



53-chizma.

M i s o l. Berilgan ikki $2x + 3y - z + 2 = 0$ va $x + y + 5z - 1 = 0$ tekisliklar orasidagi burchakni toping.

Y e c h i s h. Ikki tekislik orasidagi burchak

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\ \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

formula yordamida aniqlanadi. Berilgan tekisliklarda

$$A_1 = 2,\ B_1 = 3,\ C_1 = -1 \text{ va } A_2 = 1,\ B_2 = 1,\ C_2 = 5.$$

Demak,

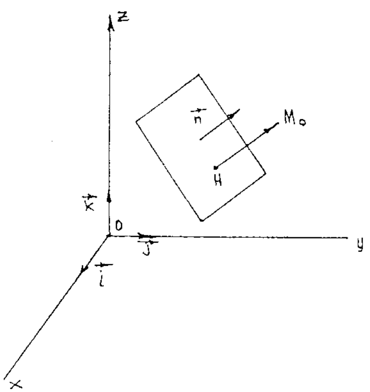
$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 1 + 3\cdot 1 - 1\cdot 5}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}\sqrt{1^2 + 1^2 + 5^2}} = \frac{2+3-5}{\sqrt{4+9+1}\cdot\sqrt{1+1+25}} = \frac{0}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{27}} = 0,$$

$$\cos\varphi = 0; \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Demak, berilgan ikki tekislik o‘zaro perpendikular.

3.1.4. NUQTADAN TEKISLIKKACHA BO‘LGAN MASOFA

Fazoda Dekart koordinatalar sistemasida $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ nuqta va $Ax + By + Cz + D = 0$ tekislik berilgan bo‘lsin. M_0 nuqtadan tekislikkacha bo‘lgan masofani hisoblash talab qilinsin. Buning uchun berilgan M_0 nuqtadan tekislikka tushirilgan perpendikularning asosini H bilan belgilaymiz (54-chizma).



54-chizma.

$|\overrightarrow{HM_0}| = d$ biz izlayotgan masofa bo‘ladi. $\vec{n} = \{A;\ B;\ C\}$ tekislik normal vektorini o‘tkazamiz. $\overrightarrow{HM_0}$ vektor $\vec{n}$ vektorga kollinear. $\overrightarrow{HM_0}$ va $\vec{n}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasini topamiz:

$$\overrightarrow{HM_0}\cdot\vec{n} = |\overrightarrow{HM_0}|\cdot\vec{n}\cdot\cos(\overrightarrow{HM_0}\,\hat{}\,\vec{n}) =$$
$$= d\cdot|\vec{n}|\cdot(\pm 1).$$

Bundan esa

$$d = \frac{|\overrightarrow{HM_0} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}. \qquad (1)$$

(1) formulani koordinatalarda hisoblaymiz. Aytaylik, H nuqtaning koordinatalari x_1; y_1; z_1 bo'lsin. U holda

$$\overrightarrow{HM_0} \cdot \vec{n} = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 + z_1) =$$

$$= Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)$$

bo'ladi.

H nuqta berilgan tekislikda yotgani uchun $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$ bo'ladi, bundan esa $\overrightarrow{HM_0}\,\vec{n} = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D$; $\vec{n} = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ ekanini e'tiborga olsak,

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (2)$$

formulaga ega bo'lamiz. Bu formula nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofani hisoblash formulasidir.

M i s o l. $M(3; -2; 1)$ nuqtadan $3x + 6y - 5z + 2 = 0$ tekislikkacha bo'lgan masofani toping.

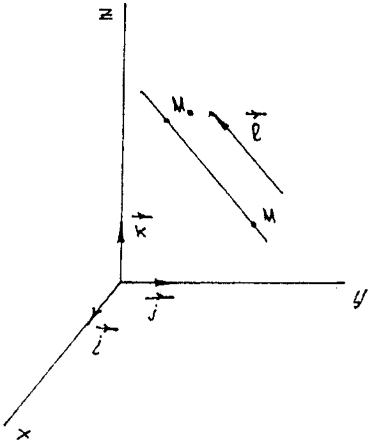
Y e c h i s h. (2) formulaga ko'ra: $x_0 = 3$; $y_0 = -2$; $z_0 = 1$; $A = 3$; $B = 6$; $C = -5$; $D = 2$; u holda

$$d = \frac{|3 \cdot 3 + 6 \cdot (-2) + (-5) \cdot 1 + 2|}{\sqrt{3^2 + 6^2 + (-5)^2}} = \frac{6}{\sqrt{70}}; \quad d = \frac{6}{\sqrt{70}} \text{ (birlik)}.$$

3.2. FAZODA TO'G'RI CHIZIQ

3.2.1. TO'G'RI CHIZIQNING BERILISH USULLARI

1) to'g'ri chiziq o'zining biror $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nuqtasi va shu to'g'ri chiziqni yo'naltiruvchi vektori $\vec{l} = \{l_1;\ l_2;\ l_3\}$ ning berilishi bilan aniqlanadi (55-chizma). To'g'ri chiziqning ixtiyoriy $M(x; y; z)$ nuqtasini olaylik; $\overrightarrow{M_0M}$ va $\vec{l}$ vektorlari kollinear bo'lgani uchun:



55-chizma.

$$\overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{l} \quad (t \in \mathrm{R}). \qquad (1)$$

$\overrightarrow{OM_0} = \vec{r_0}$, $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ desak hamda $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}$ ni hisobga olsak, (1) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\vec{r} = \vec{r} + t\vec{l}. \qquad (2)$$

(2) tenglama *to'g'ri chiziqning vektorli tenglamasi* deb ataladi.

$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0\}$ va (1) dan:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + l_1 t, \\ y &= y_0 + l_2 t, \\ z &= z_0 + l_3 t \end{aligned} \qquad (3)$$

ko'rinishdagi tenglamalar sistemasi *to'g'ri chiziqning parametrik tenglamalari* deyiladi.

2) (3) tenglamadan parametr t ni chiqarib,

$$\frac{x-x_0}{l_1} = \frac{y-y_0}{l_2} = \frac{z-z_0}{l_3} \qquad (4)$$

ega bo'lamiz. Bunga *to'g'ri chiziqning kanonik tenglamalari* deyiladi.

3) Ikkita $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ va $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ nuqtalar orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (5)$$

tenglamalar bilan ifodalanadi (bu tenglama birinchi punktdagi M_0 nuqta o'rniga M va $\vec{l} = \overrightarrow{M_1M_2}$ deb olinsa, (1) munosabatdan kelib chiqadi) yoki

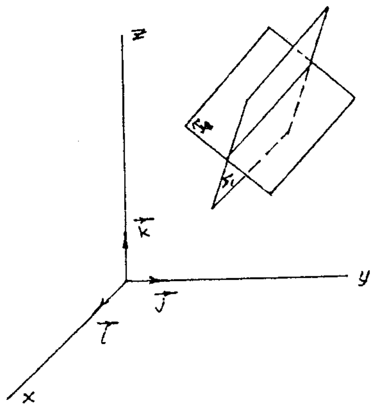
$$\begin{aligned} x &= x_1 + (x_2 - x_1)t, \\ y &= y_1 + (y_2 - y_1)t, \\ z &= z_1 + (z_2 - z_1)t. \end{aligned} \qquad (6)$$

(6) tenglamalar sistemasi *to'g'ri chiziqning parametrik ko'rinishdagi tenglamasidir.*

4) to'g'ri chiziq ikkita Π_1 va Π_2 tekisliklarning kesishish chizig'i sifatida ham berilishi mumkin, ya'ni $d = \Pi_1 \cap \Pi_2$.

$$\Pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$\Pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \quad (7)$$

Bu tenglamalar sistemasi $\Pi_2 \neq \Pi_1 \Rightarrow A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$ shart bajarilganda to'g'ri chiziqni aniqlaydi (56-chizma).



56-chizma.

1-misol. (1; 4; 3) nuqtadan o'tgan va yo'naltiruvchi vektori $\vec{l} = \{2; 3; 1\}$ bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini yozing.

Yechish. (4) tenglamadan foydalanamiz. Masala shartiga ko'ra:

$$x_0 = 1; \quad y_0 = 4; \quad z_0 = 3,$$
$$l_1 = 2; \quad l_2 = 3; \quad l_3 = 1.$$

U holda

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-3}{1}.$$

2-misol. $A(-3; 1; 2)$ va $B(8; -2; 5)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish. Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ formula yordamida aniqlanadi. Bu formulaga berilgan nuqtalarning koordinatalarini qo'ysak,

$$\frac{x+3}{8+3} = \frac{y-1}{-2-1} = \frac{z-2}{5-2} \quad \text{yoki} \quad \frac{x+3}{11} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-2}{3}$$

to'g'ri chiziq tenglamasiga ega bo'lamiz.

3.2.2. TO'G'RI CHIZIQ VA TEKISLIK ORASIDAGI BURCHAK

Aytaylik, $R = \{0;\ \vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k}\}$ Dekart koordinatalar sistemasiga nisbatan l to'g'ri chiziq o'zining

$$\begin{cases} x = x_0 + l_1 t, \\ y = y_0 + l_2 t, \\ z = z_0 + l_3 t \end{cases} \tag{1}$$

parametrik tenglamasi, Π tekislik esa

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{2}$$

tenglamasi bilan berilgan bo'lsin. To'g'ri chiziq bilan tekislikning o'zaro joylashuvini tekshirish uchun tubandagi tenglamani tekshiramiz:

$$(Al_1 + Bl_2 + Cl_3)t + (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0.$$

Bunda quyidagi hollar bo'ladi:

1) agar $Al_1 + Bl_2 + Cl_3 \neq 0$ bo'lsa, l to'g'ri chiziq tekislik bilan kesishadi;

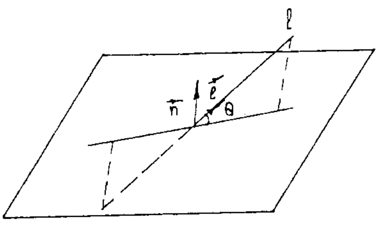
2) agar

$$\left.\begin{aligned} Al_1 + Bl_2 + Cl_3 &= 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 &\neq 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

bajarilsa, $l \cap \Pi = \varnothing$ bo'ladi.

3) agar

$$\left.\begin{aligned} Al_1 + Bl_2 + Cl_3 &= 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 &= 0 \end{aligned}\right\}$$



57-chizma.

bo'lsa, $l \subset \Pi$ bo'ladi.

To'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak deb to'g'ri chiziq bilan uning tekislikdagi ortogonal proyeksiyasi orasidagi burchakka aytiladi. (1) to'g'ri chiziq bilan (2) tekislik orasidagi burchak (57-chizma)

$$\sin\theta = \frac{|Al_1+Bl_2+Cl_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l_1^2+l_2^2+l_3^2}} \tag{4}$$

formula yordamida topiladi. Ushbu

$$Al_1 + Bl_2 + Cl_3 = 0 \tag{5}$$

tenglik berilgan tekislikning berilgan to'g'ri chiziqqa parallellik,

$$\frac{A}{l_1} = \frac{B}{l_2} = \frac{C}{l_3} \tag{6}$$

tenglik esa perpendikularlik shartlaridir. Endi tekislik va to'g'ri chiziqqa doir mashqlar bajarishda zarur bo'lgan tenglamalarni keltirib o'tamiz.

1) berilgan $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ nuqtadan o'tib, berilgan $\frac{x-x_0}{l_1} = \frac{y-y_0}{l_2} = \frac{z-z_0}{l_3}$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{l_2} = \frac{z-z_1}{l_3} \tag{7}$$

tenglamalar bilan aniqlanadi.

2) berilgan $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ nuqtadan o'tib, berilgan $Ax + By + Cz + D = 0$ tekislikka perpendikular bo'lgan to'g'ri chiziqning tenglamasi

$$\frac{x-x_1}{A} = \frac{y-y_1}{B} = \frac{z-z_1}{C} \tag{8}$$

ko'rinishda aniqlanadi.

3) berilgan $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ nuqtadan o'tib, berilgan $Ax + By + Cz + D = 0$ tekislikka parallel bo'lgan tekislikning tenglamasi:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1)=0 \tag{9}$$

ko'rinishda bo'ladi.

4) berilgan $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ nuqta orqali o'tuvchi va $\frac{x-x'}{l_1} = \frac{y-y'}{l_2} = \frac{z-z'}{l_3}$ to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lgan tekislik tenglamasi tubandagi ko'rinishda bo'ladi:

$$l_1(x - x_1) + l_2(y - y_1) + l_3(z - z_1). \tag{10}$$

1-m i s o l. Berilgan $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-2}$ to‘g‘ri chiziq va $2x + y - 2z - 6 = 0$ tekislik orasidagi burchak va ularning kesishish nuqtasini toping.

Y e c h i s h. To‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi burchak $\sin\theta = \frac{|Al_1 + Bl_2 + Cl_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l_1^2+l_2^2+l_3^2}}$ formula yordamida aniqlanadi. Berilishiga ko‘ra: $A = 2,\ B = 1,\ C = -2;\ l_1 = 1,\ l_2 = 2,\ l_3 = -2.$

Demak,

$$\sin\theta = \frac{2\cdot 1+1\cdot 2+(-2)\cdot(-2)}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = \frac{2+2+4}{\sqrt{1+1+4}\cdot\sqrt{1+1+4}} = \frac{8}{3\cdot 3} = \frac{8}{9},$$

$$\theta = \arcsin\left(\frac{8}{9}\right).$$

Endi ularning kesishish nuqtasini topamiz, uning uchun to‘g‘ri chiziq tenglamasini parametrik ko‘rinishga keltiramiz:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-2} = t,$$

$$\frac{x-1}{1} = t;\quad \frac{y-1}{2} = t;\quad \frac{z-1}{-2} = t,$$

$$\left.\begin{aligned} x &= t+1,\\ y &= 2t+1,\\ z &= -2t+1. \end{aligned}\right\}(\alpha)$$

Buni tekislik tenglamasiga qo‘yamiz:

$$2(t + 1) + (2t + 1) - 2(-2t + 1) - 6 = 0,$$
$$2t + 2 + 2t + 1 + 4t - 2 - 6 = 0,$$
$$8t + 3 - 8 = 0,$$
$$8t - 5 = 0,$$
$$t = \frac{5}{8}.$$

Buni (α) ga qo'ysak:

$$x = \frac{5}{8} + 1 = \frac{13}{8},$$

$$y = \frac{10}{8} + 1 = \frac{18}{8} = \frac{9}{4},$$

$$z = -\frac{10}{8} + 1 = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}.$$

Demak, $\left(\frac{13}{8};\ \frac{9}{4};\ -\frac{1}{4}\right)$ nuqta to'g'ri chiziq va tekislikning kesishish nuqtasi.

2-misol. $M(-1; 3; 0)$ nuqtadan o'tuvchi va $2x - y - 2z - 4 = 0$ tekislikka perpendikular bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish. $M_1(x_1; y_1; z_1)$ nuqtadan o'tib, $Ax + By + Cz + D = 0$ tekislikka perpendikular bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi $\frac{x-x_1}{A} = \frac{y-y_1}{B} = \frac{z-z_1}{C}$ formula yordamida aniqlanadi. Bundan

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-0}{-2} \quad \text{yoki} \quad \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{-2}.$$

3.2.3. IKKI TO'G'RI CHIZIQ ORASIDAGI BURCHAK

Ikkita to'g'ri chiziq $R = \{0;\ \vec{i};\ \vec{j};\ k-1\}$ Dekart koordinatalar sistemasida o'zining tenglamalari bilan berilgan bo'lsin:

$$l: \frac{x-x_0}{l_1} = \frac{y-y_0}{l_2} = \frac{z-z_0}{l_3},$$

$$l': \frac{x-x_0'}{l_1'} = \frac{y-y_0'}{l_2'} = \frac{z-z_0'}{l_3'}.$$

Ikkita to'g'ri chiziq orasidagi burchak deb bu to'g'ri chiziqlarning yo'naltiruvchi vektorlari orasidagi burchakka aytiladi.

l to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori $\vec{l} = \{l_1;\ l_2;\ l_3\}$; l' to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori $\vec{l'} = \{l_1';\ l_2';\ l_3'\}$ bo'lib, $\vec{l}$ va $\vec{l'}$ vektorlar orasidagi burchakni φ desak, $\vec{l}$ va $\vec{l'}$ vektorlar orasidagi burchak to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni beradi. Shuning uchun ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak

$$\cos\varphi = \frac{\vec{l}\cdot\vec{l_1'}}{|\vec{l}||\vec{l'}|} = \frac{l_1\cdot l_1' + l_2\cdot l_2' + l_3\cdot l_3'}{\sqrt{l_1^2+l_2^2+l_3^2}\cdot\sqrt{l_1'^2+l_2'^2+l_3'^2}} \quad (1)$$

formula yordamida aniqlanadi.

(1) formuladan esa quyidagi kelib chiqadi:

$$l \perp \vec{l'} \Leftrightarrow \vec{l}\cdot\vec{l'} = 0 \Rightarrow l_1\cdot l_1' + l_2\cdot l_2' + l_3\cdot l_3' = 0.$$

M i s o l. Yo'naltiruvchi vektorlari mos ravishda $\vec{n_1} = \{10;\ 2;\ 11\}$, $\vec{n_2} = \{3;\ 12;\ 4\}$ bo'lgan to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

Y e c h i s h. Bu vektorlar orasidagi burchak to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakka teng. Demak, (1) formulaga ko'ra berilgan to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|} = \frac{10\cdot3+2\cdot12+11\cdot4}{\sqrt{10^2+2^2+11^2}\cdot\sqrt{3^2+12^2+4^2}} = \frac{98}{195};$$

$$\varphi = \arccos\frac{98}{195} \approx 59^\circ 50'.$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Tekislikning normal vektori nima?
2. Tekislik tenglamasida hadlariga qarab, koordinata o'qlariga nisbatan qanday joylashadi?
3. Ikkita tekislik orasidagi burchakni hisoblash uchun formula keltirib chiqaring.
4. Ikkita tekislikning parallellik va perpendikularlik shartlari nimadan iborat?
5. Fazoda to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori nima?
6. To'g'ri chiziqning kanonik tenglamasini keltirib chiqaring.
7. To'g'ri chiziq umumiy tenglamasi bilan berilgan bo'lsa, uning yo'naltiruvchi vektorini qanday aniqlash mumkin?
8. To'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchakni qanday tushunasiz?
9. Fazoda nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa formulasini keltirib chiqaring.

3.3. IKKINCHI TARTIBLI SIRTLAR

Ikkinchi tartibli sirtlarning umumiy tenglamasi

Biror Dekart koordinatalar sistemasida koordinatalari quyidagi tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami *ikkinchi tartibli sirt* deyiladi:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz +$$
$$+ 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0, \qquad (1)$$

bu tenglamadagi a_{21}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23} koeffitsiyentlarning kamida bittasi noldan farqli bo'lishi kerak. Agar biror sirt dekart sistemasida 2-darajali tenglama bilan berilgan bo'lsa, boshqa sistemada ham 2-daraja bilan beriladi. Biz oddiy ko'rinishdagi ikkinchi darajali tenglamalarning ba'zilarini qaraymiz.

3.3.1. SFERA TENGLAMASI. SFERIK SIRT

Sferaning $Oxyz$ to'g'ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasidagi tenglamasini tuzamiz. Aytaylik, $C(a;\ b;\ c)$ nuqta sferaning markazi, R esa uning radiusi bo'lsin. Sferaning ixtiyoriy nuqtasi $M(x;\ y;\ z)$ uning markazi bo'lgan nuqtadan R masofada joylashish xossasidan foydalansak, sfera tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2. \qquad (2)$$

(2) tenglamaga markazi $C(a;\ b;\ c)$ nuqtada va radiusi R ga teng bo'lgan sfera tenglamasi deyiladi. Agar $a = b = c = 0$ bo'lsa, (2) tenglamadan markazi koordinatalar boshida, radiusi R ga teng bo'lgan sfera tenglamasiga ega bo'lamiz:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Endi (2) ni quyidagicha yozamiz:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - R^2 = 0. \qquad (3)$$

(3) dan: 1) sferaning ikkinchi tartibli sirt ekanini;
2) (3) da xy; zx; yz ko'paytmalar qatnashgan hadlar yo'qligini;

3) x^2, y^2, z^2 oldidagi koeffitsiyentlarning tengligini ko'ramiz.

Endi (1) da $a_{11} = a_{13} = a_{23} = 0$ va $a_{11} = a_{22} = a_{33}$ deb olinsa, u holda

$$a_{11}x^2 + a_{11}y^2 + a_{11}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44}=0 \qquad (4)$$

tenglama sferani ifoda qiladimi, degan savolga javob beraylik.

(4) ni $a_{11} \neq 0$ ga bo'lib,

$$2a_{14}/a_{11} = A;\ 2a_{24}/a_{11} = B;\ 2a_{34}/a_{11} = C;\ a_{44}/a_{11} = D$$

belgilashlarni kiritsak,

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (5)$$

ko'rinishdagi tenglamaga ega bo'lamiz.

(5) tenglamani biroz shakl o'zgartirishlardan keyin ushbu ko'rinishda yozamiz:

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{B}{2}\right)^2 + \left(z+\frac{C}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(A^2+B^2+C^2-4D) \qquad (6)$$

yoki

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{B}{2}\right)^2 + \left(z+\frac{C}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}\right)^2. \qquad (7)$$

(7) dan ko'rinadiki, $A^2 + B^2 + C^2 - 4D \geq 0$ bo'lganda (7) tenglik o'rinli bo'ladi. Bu deganimiz $A^2 + B^2 + C^2 - 4D > 0$ bo'lsa, (7) tenglama markazi $\left(-\frac{A}{2};\ -\frac{B}{2};\ -\frac{C}{2}\right)$ nuqtada va radiusi $R = \frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}$ ga teng bo'lgan sferani ifodalaydi. Agar $A^2 + B^2 + C^2 - 4D = 0$ bo'lsa, (7) tenglama $\left(x+\frac{A}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{B}{2}\right)^2 + \left(z+\frac{C}{2}\right)^2 = 0$ ko'rinishda bo'lib, u faqat bitta $\left(-\frac{A}{2};\ -\frac{B}{2};\ -\frac{C}{2}\right)$ nuqtani ifodalaydi. Demak, (5) tenglama faqatgina $A^2+B^2+C^2-4D>0$ shartda sferani aniqlaydi.

M i s o l. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 8z + 6 = 0$ sferaning markazi va radiusini toping. Berilgan tenglamani $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ ko‘rinishga keltiramiz. Buning uchun tenglamada x, y, z li hadlarni olib, ularni to‘la kvadratga keltiramiz:

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y + z^2 + 8z + 6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+4)^2 + 6 - 1 - 4 - 16 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+4)^2 = 15 \text{ yoki}$$
$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+4)^2 = (\sqrt{15})^2.$$

Demak, sferaning markazi $(1;\ -2;\ -4)$ nuqtada, radiusi esa $R = \sqrt{15}$ ga teng.

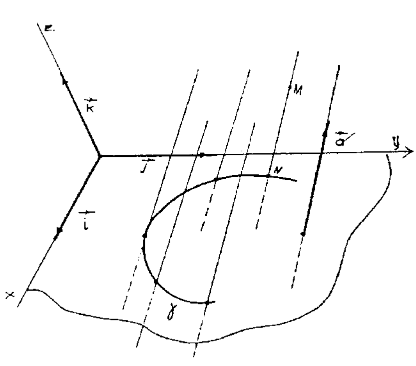
3.3.2. IKKINCHI TARTIBLI SILINDRIK SIRT

Aytaylik, Π tekislikda γ ikkinchi tartibli chiziq, Π tekislikka parallel bo‘lmagan d to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsin. Bizga ma’lumki, d to‘g‘ri chiziq o‘ziga parallel bo‘lgan ε to‘g‘ri chiziqlar dastasini aniqlaydi. Shu ε dastaning γ chiziq bilan kesishadigan to‘g‘ri chiziqlariga tegishli bo‘lgan fazoning Φ nuqtalar to‘plami ikkinchi tartibli *silindrik sirt* deyiladi.

γ chiziq uning *yo‘naltiruvchisi*, γ chiziqni kesuvchi ε dastaning to‘g‘ri chiziqlari Φ silindrik sirtning *yasovchilari* deyiladi. Φ silindrik sirtning $R = \{0;\ \vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k}\}$ koordinatalar sistemasidagi tenglamasini keltirib chiqaramiz. Aytaylik, d vektor chiziqning yo‘naltiruvchi vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ bo‘lsin (58-chizma). γ chiziq esa, $R = \{0;\ \vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k}\}$ koordinatalar sistemasida

$$F(x,\ y) = 0 \qquad (1)$$

tenglama bilan aniqlangan bo‘lsin.



58-chizma.

Ixtiyoriy $M(x;\ y;\ z) \in \Phi$ nuqtani olamiz. Shu M nuqtadan o‘tgan yasovchining xOy tekislik bilan kesishgan nuqtasi $N(x;\ y;\ 0)$ bo'lsin. U holda $\overrightarrow{MN} = \{x_1 - x;\ y_1 - y;\ z_1 - z\}$ va $\vec{a}$ vektor bilan $\overrightarrow{MN}$ vektor kollinear bo'lgani uchun $\overrightarrow{MN} = t\vec{a}$, bundan: $x_1 = x + a_1 t$; $y_1 = y + a_2 t$; $0 = z + a_3 t$;

$$x_1 = x - a_1/a_3 \cdot z; \quad y_1 = y - a_2/a_3 \cdot z, \tag{2}$$

$$F(x - a_1/a_3 \cdot z; \quad y - a_2/a_3 \cdot z). \tag{3}$$

Agar ikkinchi tartibli silindrik sirtning yo'naltiruvchisi ellipsdan iborat bo'lsa, u *elliptik silindr*, giperboladan (paraboladan) iborat bo'lsa, *giperbolik* (mos ravishda *parabolik*) silindr deyiladi. Agar silindrik sirtning yo'naltiruvchisi juft kesishuvchi (parallel) to'g'ri chiziqlardan iborat bo'lsa, sirt juft kesishuvchi (mos parallel) tekisliklardan iborat bo'ladi.

M i s o l. Yo'naltiruvchi xOy tekislikda $x^2 + 3xy - 2y^2 - x + y + 1 = 0$ tenglama bilan aniqlanuvchi, yasovchilari $\{1;\ 2;\ 1\}$ vektorga parallel silindrik sirt tenglamasini yozing.

Y e c h i s h. Berilganlarga asosan:

$$F(x, y) = x^2 + 3xy - 2y^2 - x + y + 1 = 0,$$

$$\vec{a} = \{1;\ 2;\ 1\},\ a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 1.$$

U holda sirt tenglamasi:

$$F(x - z,\ y - 2z) = (x - z)^2 + 3(x - z)(y - 2z) - 2(y - 2z)^2 - \\ - (x - z) + (y - 2z) + 1 = 0$$

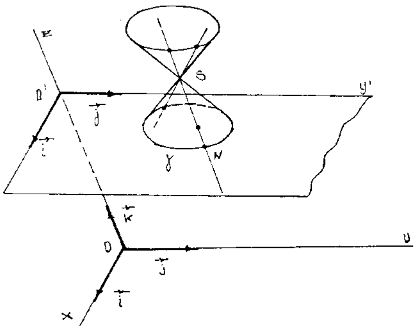
yoki

$$x^2 - 2y^2 + z^2 + 3xy - 8xz + 5yz - x + y - z + 1 = 0.$$

3.3.3. IKKINCHI TARTIBLI KONUS SIRT

Aytaylik, Π tekislikda γ ikkinchi tartibli chiziq va $S \notin \Pi$ nuqta berilgan bo'lsin. Bizga ma'lumki, S nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziqlar $\varepsilon(S)$ to'g'ri chiziqlar dastasini aniqlaydi.

$\varepsilon(S)$ dastaning γ chiziq bilan kesishuvchi to'g'ri chiziqlariga yoki γ ga nisbatan asimptotik yo'nalishga ega to'g'ri chiziqlarga tegishli bo'lgan fazoning nuqtalar to'plami Φ ga *ikkinchi tartibli konus sirt* (yoki konus) deyiladi. Bunda γ yo'naltiruvchisi, $\varepsilon(S)$ esa yasovchilar, S — konus sirtning *uchi* deyiladi. Konus sirt tenglamasini keltirib chiqaramiz. Buning uchun xOy koordinatalar tekisligi Π tekislikka parallel bo'lgan $R = \{0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$ koordinatalar sistemasini olamiz. Aytaylik, tekislik Oz o'qini $O(0;\ 0;\ h)$ nuqtada kessin hamda Φ konus sirtining uchi $S(x_0;\ y_0;\ z_0)$ koordinatalarga ega bo'lsin (59-chizma).



59-chizma.

Agar ikkinchi tartibli chiziq γ ning tenglamasi

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{10}$$

ko'rinishda bo'lsa, konus sirtning tenglamasi tubandagi ko'rinishda bo'ladi:

$$G(x, y, z) = [(z - z_0)/(h - z_0)]^2 \cdot F\{x_0 + [(x - x_0)/(z - z_0)](h - z_0),$$
$$y_0 + [(y - y_0)/(z - z_0)](h - z_0)\}. \qquad (1)$$

Agar Φ konus sirtning uchi R koordinatalar sistemasining boshi bilan ustma-ust tushsa, u holda $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, $h \neq 0$ bo'lib, tenglama

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}y + a_{22}y^2 + 2a(a_{10}/h)x^2 + 2(a_{20}/h)yz + (a_{10}/h)z^2 = 0$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

M i s o l: To'g'ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasida konus sirtning uchi $S(0;\ 0;\ 3)$ nuqtada, yo'naltiruvchisi esa

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 1 \end{cases}$$

tenglamalar bilan aniqlangan bo'lib, xOy tekislikka parallel va tenglamasi $z = 0$ bo'lgan Π tekislikda yotadi. Π tekislik esa Oz o'qini $(0;\ 0;\ 1)$ nuqtada kesadi. Konus sirt tenglamasini tuzing.

Y e c h i s h. Yo‘naltiruvchi Π tekislikda $x^2 + y^2 - 1 = 0$ tenglama bilan aniqlanadi. U holda berilganlarga ko‘ra:

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1; \quad h = 1, \; z_0 = 3.$$

(1) formuladan:

$$G(x,y,z) = (z-3)^2 / 4\left\{\left[\frac{x}{z-3}(-2)\right]^2 + \left[\frac{y}{z-3}(-2)\right]^2 - 1\right\} = 0$$

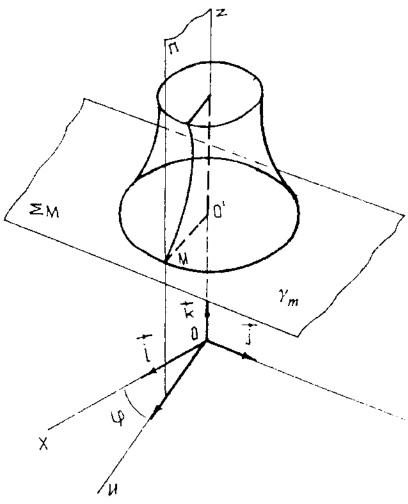
yoki

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{4}(z-3)^2 = 0.$$

3.3.4. AYLANMA SIRTLAR

Aytaylik, Π tekislikda S to‘g‘ri chiziq va γ egri chiziq berilgan bo‘lsin. Fazoda shunday $R = \{0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$ ortonormal reper olamizki, uning Oz o‘qi S to‘g‘ri chiziq bilan ustma-ust tushsin.

Π tekislikda esa ortonormal Ouz koordinatalar sistemasini kiritamiz, bunda $Ou = \Pi \cap xOy$. Bu koordinatalar sistemasiga nisbatan γ chiziq $u = f(z)$ tenglama bilan aniqlanadi. Ox va Ou o‘qlar orasidagi musbat burchakni φ bilan belgilaymiz va $M \in \gamma$ olamiz. φ burchak $[0; 2\pi)$ oralig‘ida o‘zgarganda, M nuqta markazi $O' \in Oz$ nuqtada va ΣM tekislikda yotuvchi Oz o‘qqa perpendikular bo‘lgan γ_M aylana yasaydi (60-chizma). U holda $F = \bigcup_{M \in \gamma} \gamma_M$ figuraga *aylanma sirt* deyiladi. S to‘g‘ri chiziq *aylanish o‘qi* deyiladi.



60-chizma.

F sirtni aylanish o‘qi orqali o‘tuvchi tekisliklar bilan kesishishdan hosil bo‘lgan chiziqlar *meridianlar* deyiladi. Aylanish o‘qiga parallel tekisliklar bilan Fning kesishishidan hosil bo‘lgan chiziqlar *parallellar* deyiladi. Agar ixtiyoriy $M \in F$ nuqtaning koordinatalari $(x; y; z)$ bo‘lsa, u holda

$$\begin{cases} x = u\cos\varphi, \\ y = u\sin\varphi, \\ u = f(z) \end{cases} \tag{1}$$

bo‘ladi;

$$(1) \Rightarrow x^2 + y^2 = f^2(z). \tag{2}$$

Shunday qilib, (2) tenglama R reperda $\begin{cases} x = f(z), \\ y = 0 \end{cases}$ tenglamalar bilan berilgan γ chiziqning Oz o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan aylanma sirtning tenglamasidir.

Shunga o‘xshash, $x^2 + z^2 = y^2(x)$ tenglama esa $\begin{cases} y = y(x), \\ z = 0 \end{cases}$ tenglamalar bilan berilgan chiziqning Oz o‘qi atrofida aylanishdan hosil bo‘lgan aylanma sirt tenglamasidir. $x^2 + y^2 = h^2(y)$ esa $\begin{cases} x = h(y), \\ z = 0 \end{cases}$ tenglamalar bilan berilgan chiziqning Oy o‘qi atrofida aylanishdan hosil bo‘lgan aylanma sirt tenglamasidir.

1-misol. $y = x$ to‘g‘ri chiziqning Ox o‘q atrofida aylanishdan hosil bo‘lgan aylanma sirt tenglamasini tuzing.

Yechish. To‘g‘ri chiziq tenglamasidagi y ni $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$ bilan almashtiramiz:

$$x = \sqrt{y^2 + z^2} \quad \text{yoki} \quad y^2 + z^2 - x^2 = 0;$$

bu izlanayotgan aylanma sirt tenglamasidir. Aylanma sirt doiraviy konus ekani ravshan.

2-misol. $\frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsning Oy o‘q atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan aylanma sirt tenglamasini tuzing.

Yechish. Ellips tenglamasidagi z ni $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$ bilan almashtiramiz:

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2+z^2}{c^2}=1.$$

Bu esa izlangan sirt tenglamasi. $b = c$ bo'lsa, bu sirt sferaga aylanadi.

3-m i s o l. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ giperbolaning Oy o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan aylanma sirtning tenglamasini tuzing.

Y e c h i s h. Bu misolda x ni $\pm\sqrt{x^2+z^2}$ bilan almashtiramiz. Natijada $\frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ sirt hosil bo'ladi.

Quyida aylanma sirtlarning turlarini ko'rib o'tamiz.

Ellipsoid

γ ellipsning simmetriya o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan Φ sirt *aylanma ellipsoid* deyiladi.

Aytaylik, γ ellips $R=\{0;\ \vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k}\}$ ortonormal reperning xOy tekisligida yotgan bo'lsin, u holda $R_1=\{0;\ \vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k}\}$ reperga nisbatan $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \Rightarrow z^2=c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$ tenglamaga ega bo'lamiz. γ ellipsning Ox o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lgan Φ aylanma ellipsoidning tenglamasi esa tubandagicha bo'ladi:

$$y^2+z^2=c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{c^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{3}$$

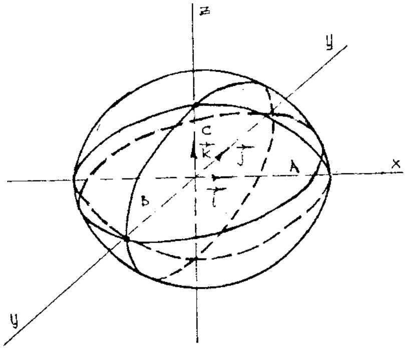
xOz tekisligiga nisbatan f siqishni bajaramiz, ya'ni: $x'=x$, $y'=ky$, $z'=z$.

U holda R reperga nisbatan $\Phi=f(\Phi')$ ellipsoid tenglamasiga ega bo'lamiz:

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{k^2c^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1.$$

$k^2c^2=b^2$ belgilash kiritib, koordinatalarni oldingiday qilib olsak,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (4)$$



61-chizma.

tenglamaga ega bo'lamiz. (4) tenglama ellipsoidning kanonik tenglamasi bo'lib, a, b, c lar ellipsoidning yarim o'qlaridir.

Ellipsoid uchun berilgan R reperning koordinata tekisliklari simmetriya tekisliklari, koordinata o'qlari esa simmetriya o'qlari bo'lib xizmat qiladi. Simmetriya o'qlari ellipsoidning *o'qlari* deyiladi. Ellipsoidning o'qlari bilan kesishish nuqtalari uning *uchlari* deyiladi. Simmetriya markazi ellipsoidning *markazi* deyiladi (61-chizma).

Agar ellipsoidning xOy tekisligiga parallel bo'lgan $z = h$ tekislik bilan kessak, kesim tubandagi tenglama bilan ifodalanadi:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2},$$

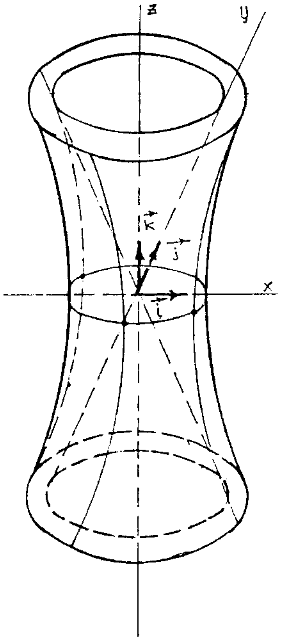
bunda, agar $|h| < c$ bo'lsa, kesim ellipsni, agar $|h| > c$ bo'lsa, kesim bo'sh to'plamni, agar $|h| = c$ bo'lsa, kesim ellipsoidning uchini ifodalaydi. Shunga o'xshash, ellipsoidni xOz va yOz koordinata tekisliklariga parallel tekisliklar bilan kesish natijasida (kesimda) ellips, bo'sh to'plam yoki ellipsoid uchi hosil bo'lishini ko'rish mumkin.

M i s o l. Yarim o'qlari mos ravishda 2, 3, 7 ga teng bo'lgan ellipsoid tenglamasini tuzing.

Y e c h i s h. Masala shartida berilganlarga ko'ra: $a = 2$; $b = 3$; $c = 7$. U holda ellipsoid tenglamasi $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{49}=1$ bo'ladi.

Giperboloidlar

γ giperbolaning o'zining mavhum o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan Φ' sirtga bir pallali aylanma giperboloid deyiladi. Fazoning aylanish o'qi orqali o'tuvchi Π tekislikka f siqishda Φ' bir pallali aylanma giperboloidning olgan vaziyati Φ ga *bir pallali giperboloid* deyiladi:



62-chizma.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (5)$$

(5) ko'rinishdagi tenglamaga bir pallali giperboloidning kanonik tenglamasi deyiladi. (5) tenglamadan ko'rinadiki, R reperning koordinata tekisliklari bir pallali giperboloidning simmetriya tekisliklari hisoblanadi. Ox va Oy o'qlar bir pallali giperboloidni kesadi va uning *haqiqiy o'qlari* deyiladi. Oz o'qi esa bir pallali giperboloid bilan kesishmaydi, shuning uchun unga *mavhum o'q* deyiladi. Bir pallali giperboloidning simmetriya o'qlari bilan kesishish nuqtalari uning *uchlari* deyiladi. Koordinatalar boshi 0 nuqta bir pallali giperboloidning simmetriya *markazi* bo'lib, uning *markazi* deyiladi. a, b sonlar bir pallali giperboloidning *haqiqiy yarim o'qlari*, c esa *mavhum yarim o'qi* deyiladi (62-chizma).

Giperboloidni xOy tekislik bilan kessak, kesimda $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0 \end{cases}$ ellips hosil bo'ladi. Shunga o'xshash, giperboloidni xOz, yOz tekisliklar bilan kessak, kesimda $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$ va $\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x \leq 0 \end{cases}$ giperbolalar hosil bo'ladi. Agar giperboloidni xOy tekislikka parallel bo'lgan $z = h$ tekislik bilan kessak, kesimda $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)} = 1, \\ z = h \end{cases}$ ellips hosil bo'ladi. Bu ellips yarim o'qlari: $\tilde{a} = \frac{a}{c}\sqrt{c^2 + h^2}$; $\tilde{b} = \frac{b}{c}\sqrt{c^2 + h^2}$;

$h = 0$ bo'lsa, ellipsning yarim o'qlari o'zining minimal qiymatiga ega bo'ladi, ya'ni $\tilde{a} = a$, $\tilde{b} = b$.

Bir pallali giperboloidni Oy va Ox o'qiga perpendikular bo'lgan tekisliklar bilan kessak ($x = h$; $y = h$) kesimda γ' va γ'' lar hosil bo'ladi:

$$\gamma': \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{a^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2} \\ y = h \end{cases} \quad \text{va} \quad \gamma'': \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2}. \\ x = h \end{cases}$$

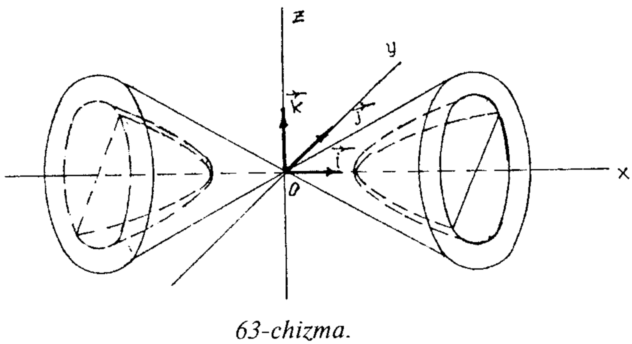
Agar, $|h| \neq a$, $|h| \neq b$ bo'lsa, u holda γ' va γ'' lar giperbolalarni ifodalaydi. Agar $|h| = b$ bo'lsa, u holda γ' — kesishuvchi to'g'ri chiziqlar juftini, $|h| = a$ bo'lsa, γ'' — kesishuvchi to'g'ri chiziqlar juftini ifodalaydi. γ — giperbolani o'zining haqiqiy o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan Φ' sirtga *ikki pallali aylanma giperboloid* deyiladi.

γ fazoni aylanish o'qi orqali o'tuvchi Π tekislikka f siqishda Φ' ning olgan vaziyati Φ *ikki pallali giperboloid* deyiladi:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (6)$$

tenglama ikki pallali giperboloidning *kanonik tenglamasi* deyiladi (63-chizma). (6) tenglamadan ko'rinadiki, koordinata tekisliklari ikki pallali giperboloid uchun simmetriya tekisliklari hisoblanadi. Ox o'qi Φ sirtni ikki haqiqiy nuqtada kesadi, shuning uchun unga haqiqiy o'q deyiladi.

Oy, Oz o'qlari ikki pallali giperboloid bilan haqiqiy nuqtalarga ega emas, shuning uchun ularga *mavhum o'qlar* deyiladi. Ikki pallali



63-chizma.

giperboloidni o'qlar bilan kesishish nuqtalari uning *uchlari* deyiladi. U ikkita haqiqiy uchga ega.

a — ikki pallali giperboloidda *haqiqiy yarim o'qi*, b va c lar *mavhum yarim o'qlar* deyiladi. Ikki pallali giperboloidni Ox o'qqa perpendikular bo'lgan tekislik bilan kessak,

$$\gamma''' : \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = \dfrac{h^2}{a^2} - 1. \\ h = x \end{cases}$$

kesim hosil bo'ladi.

Agar $|h| > a$ bo'lsa, γ''' ellipsdan iborat bo'ladi.

Agar $|h| < a$ bo'lsa, u holda $\gamma''' = \varnothing$.

Agar $|h| = a$ bo'lsa, γ''' nuqtadan iborat bo'ladi.

Shunga o'xshash, ikki pallali giperboloidni mavhum o'qlarga perpendikular bo'lgan tekisliklar bilan kessak, kesimda giperbola bo'lishiga ishonch hosil qilamiz.

1-misol. $x^2 - 7y^2 - 7z^2 + 49 = 0$ tenglama bilan berilgan sirtning shaklini aniqlang.

Yechish. Tenglamaning ikkala tomonini -49 ga bo'lamiz, u holda

$$-\frac{x^2}{49} + \frac{y^2 + z^2}{7} = 1,$$

demak, berilgan tenglama aylanish o'qi Ox bo'lgan bir pallali giperboloidning tenglamasidir.

2-misol. $3x^2 + 4y^2 - 8z^2 + 24 = 0$ tenglama bilan qanday sirt tasvirlanadi?

Yechish. Tenglamaning ikkala tomonini 24 ga bo'lib, uni tubandagi ko'rinishga keltiramiz: $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} - \frac{z^2}{3} = 1$; bu tenglama yarim o'qlari $a = 2\sqrt{2}$, $b = \sqrt{6}$, $c = \sqrt{3}$ bo'lgan uch o'qli ikki pallali giperboloidni tasvirlaydi.

Paraboloidlar

Parabolaning o'z o'qlari atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirtga *aylanma paraboloid* deyiladi. Elliptik va giperbolik paraboloidlar aylanish o'qi orqali o'tuvchi tekislikka siqishni bajarish natijasida hosil bo'ladi.

1. To'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \qquad (7)$$

tenglama bilan tasvirlangan sirt *elliptik paraboloid* deb ataladi (64-chizma). (7) tenglamadan ko'rinadiki, yOz va xOz tekisliklari elliptik paraboloid uchun simmetriya tekisliklari hisoblanadi. Oz o'qi elliptik paraboloidning simmetriya o'qi hisoblanib, uning o'qi deyiladi. Koordinatalar sistemasining boshi elliptik paraboloidning koordinata o'qlari bilan kesishgan nuqtasi bo'lib, uning uchi deyiladi. Elliptik paraboloidni uning o'qiga perpendikular bo'lgan tekislik bilan kessak, kesim tubandagi tenglama bilan aniqlanadi:

$$\gamma : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2h, \\ z = h, \end{cases}$$

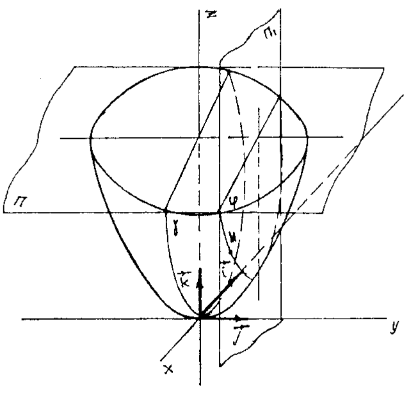
agar $h > 0$ bo'lsa, γ — ellips, agar $h < 0$ bo'lsa, u holda $\gamma = \varnothing$, agar $h = 0$ bo'lsa, γ kesim O uchdan iborat bo'ladi.

Elliptik paraboloidni Ox, Oy o'qlariga perpendikular bo'lgan $x = h$ va $y = h$ tekisliklar bilan kessak, kesimda parabola hosil bo'ladi.

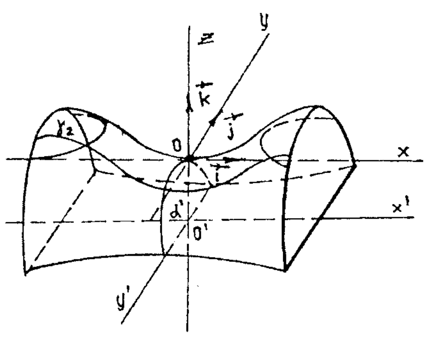
2. Ushbu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \qquad (8)$$

tenglama bilan tasvirlangan sirt *giperbolik paraboloid* deyiladi. (8) tenglama esa uning kanonik tenglamasidir (65-chizma).



64-chizma.



65-chizma.

Giperbolik paraboloidni xOy tekislikka parallel bo'lgan $z = h$ tekislik bilan kessak, kesim quyidagi tenglama bilan aniqlanadi:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2h, \\ z = h, \end{cases}$$

$h > 0$ bo'lganda, bu chiziq haqiqiy o'qi $z = h$ tekislikda va Ox o'qqa parallel giperbolani, $h < 0$ bo'lganda esa, haqiqiy o'qi Oy o'qqa parallel giperbolani tasvirlaydi. $h = 0$ bo'lganda, kesim ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziqlar juftini aniqlaydi. Shunga o'xshash, giperbolik paraboloidni Oy va Ox o'qlarga perpendikular tekislik bilan kessak, kesimda parabola hosil bo'lishini ko'rish mumkin.

1-m i s o l. $3x^2 + 2y^2 = 24z$ tenglama bilan berilgan sirt shaklini aniqlang.

Y e c h i s h. Sirt shaklini aniqlash uchun tenglamaning har ikkala tomonini 24 ga bo'lamiz. U holda $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{12} = z$ ko'rinishidagi tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglamani ham $z = \frac{x^2}{8 \cdot 4} + \frac{y^2}{2 \cdot 6}$ ko'rinishida yozish mumkin. Bundan ko'rinadiki, berilgan tenglama elliptik paraboloidni tasvirlar ekan.

2-m i s o l. $x^2 - y^2 = 6z$ tenglama bilan berilgan sirtning shaklini aniqlang.

Y e c h i s h. Berilgan sirt tenglamasini $z = \frac{x^2}{2 \cdot 3} - \frac{y^2}{2 \cdot 3}$ ko'rinishida yozish mumkin. Demak, berilgan tenglama giperbolik paraboloidni tasvirlar ekan.

3.3.5. IKKINCHI TARTIBLI SIRTLARNING TEXNIKADA QO'LLANILISHI

Ikkinchi tartibli sirtlar to'g'ri chiziqli yasovchilarga ega bo'lishidan ulardan texnikada foydalaniladi.

(Agar to'g'ri chiziqning harakati natijasida sirt hosil qilish mumkin bo'lsa, sirtni to'g'ri chiziqli sirt deyiladi.)

Ikkinchi tartibli sirtlardan konus bilan silindrik, shuningdek, bir pallali giperboloid bilan giperbolik paraboloidlar ham to'g'ri chiziqli sirtlardir.

Bir pallali giperboloidning to'g'ri chiziqli yasovchilarining mavjudligidan qurilish ishlarida foydalaniladi. Masalan, sobiq Ittifoq Fanlar Akademiyasining faxriy a'zosi Vladimir Grigoryevich Shuxov loyihasiga ko'ra Moskvadagi dastlabki televizion machta qurilishida bir pallali aylanma giperboloid shaklidan foydalanilgan.

Bu shaklda ishlangan machta mustahkam bo'lib, ishlash uchun yengil bo'lgan. Shuningdek, texnikada metall yorug'lik (nur) qaytargichlar aylanma paraboloid shaklida ishlanadi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Markazi koordinatalar boshida, radiusi R ga teng bo'lgan sfera tenglamasini keltirib chiqaring.
2. Konus sirtning ta'rifini keltiring.
3. Silindrik sirt ta'rifini aytib bering.
4. Uch o'qli ellipsoidning kanonik tenglamasini yozing va uning shaklini kesimlar usuli bilan tekshiring.
5. Bir pallali va ikki pallali giperboloidning kanonik tenglamalarini yozing va ularning shaklini kesimlar usuli bilan tekshiring.
6. Giperbolik, elliptik paraboloidlarning kanonik tenglamalarini yozing va ularning shakllarini kesimlar usuli bilan tekshiring.

4-bob. HAQIQIY VA KOMPLEKS SONLAR

4.1. TO'PLAM. TO'PLAMLAR USTIDA AMALLAR

4.1.1. TO'PLAM. TO'PLAMNING ELEMENTLARI

To'plam deganda narsalar, buyumlar, obyektlarni biror xossasiga ko'ra birgalikda (bitta butun deb) qarashga tushuniladi.

Masalan, hamma natural sonlarni birgalikda qarasak, natural sonlar to'plami hosil bo'ladi. Bir turarjoyda yashovchi talabalarni birgalikda qarash bilan shu talabalar uyidagi talabalar to'plamini hosil qilamiz. To'g'ri chiziqda yotuvchi hamma nuqtalarni bitta butun deb qarash shu to'g'ri chiziqdagi nuqtalar to'plamini, maktabdagi o'quvchilarni birgalikda qarash o'quvchilar to'plamini beradi va h. k.

1-ta'rif. To'plamni tashkil etuvchi narsalar, buyumlar, obyektlar to'plamning *elementlari* deb ataladi. Masalan, yuqoridagi misollardagi o'quvchilar, talabalar, natural sonlar mos to'plamlarning elementlari hisoblanadi. To'plamlar, odatda, lotin yoki grek alfavitining bosh harflari bilan, ularning elementlari esa alfavitning kichik harflari bilan belgilanadi.

A to'plam $a, b, c, d, \ldots, \alpha, \beta, \gamma$ elementlaridan tuzilganligi $A = \{a, b, c, d, \ldots, \alpha, \beta, \gamma\}$ ko'rinishda yoziladi.

2-ta'rif. Bitta ham elementga ega bo'lmagan to'plam *bo'sh to'plam* deb ataladi va $\varnothing$ bilan belgilanadi.

a element A to'plamning elementi ekanligi $a \in A$ yoki $A \ni a$ ko'rinishda belgilanadi va «a element A to'plamning elementi», «a element A to'plamga tegishli», «a element A to'plamda mavjud» yoki «a element A to'plamga kiradi» deb ataladi.

a element A to'plamning elementi emasligi $a \notin A$ yoki $A \not\ni a$ belgi bilan ko'rsatiladi. Masalan, $A = \{a, b, c\}$ to'plam uchun $a \in A$, $c \in A$, lekin $e \notin A$.

To'plamni tashkil etuvchi elementlar soni chekli yoki cheksiz bo'lishi mumkin. Birinchi holda chekli to'plamga, ikkinchi holda esa cheksiz to'plamga ega bo'lamiz. Masalan, $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{a, b, d\}$ to'plamlar chekli bo'lib, ular mos ravishda bitta, ikkita va uchta elementlardan tuzilgan. Quyidagi $A = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$, $B = \{2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}$ to'plamlar cheksiz.

Izoh. A to'plamda faqat a element o'z-o'ziga teng, lekin har qanday ikkita boshqa-boshqa a va b elementni tengmas deb hisoblaymiz, bundan A to'plamning har bir elementi bu to'plamda bir martagina olinganligi (bir martagina uchraganligi) ma'lum bo'ladi. A elementning o'z-o'ziga tengligi $a = a$ ko'rinishda, a va b elementlarining har xilligi $a \neq b$ ko'rinishida belgilanadi.

Agar A to'plamning a elementi B to'plamning b elementiga teng, ya'ni $a = b$ desak, bundan bitta element ikkala to'plamda har xil harflar bilan belgilanganligini tushunamiz.

3-ta'rif. A to'plamning har bir elementi B to'plamda ham mavjud bo'lsa va aksincha, B to'plamning har bir elementi A to'plamda ham mavjud bo'lsa, A va B to'plamlarni *teng* (bir xil) deb atab buni $A = B$ va $B = A$ ko'rinishda belgilaymiz.

Ta'rifdan ma'lumki, ikki to'plamning tengligi ularning aslida bitta to'plam ekanligini bildiradi. Shunga o'xshash, bir qancha to'plamlarning tengligi haqida gapirish mumkin.

4-ta'rif. B to'plamning har bir elementi A to'plamda ham mavjud bo'lsa, B ni A to'plamning *to'plam osti (qismi, qism to'plami)* deymiz, buni quyidagicha belgilaymiz:

$$B \subset A \quad \text{yoki} \quad A \supset B.$$

Izoh. Bu ta'rifdan ko'rinadiki, B to'plamning hamma elementlari A da mavjud bo'lgan holda, A da B ga kirmagan boshqa elementlar bo'lmasa, $A = B$ yoki $B = A$ tenglikka kelamiz.

Shuning bilan birga 4-ta'rifdan bo'sh to'plam va har bir to'plam o'zining to'plam osti (qism to'plami) ekanligi ko'rinadi. Masalan, $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ to'plam uchun $B = \{a\}$, $C = \{b, d, f\}$, $D = \{d, g\}$ to'plamlarning har qaysisi to'plam osti (qism to'plam)dir.

Agar A to'plamning har bir elementiga B to'plamning yagona bir elementi mos kelsa, A va B to'plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatiladi deyiladi. Agar A va B to'plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilgan bo'lsa, ular *ekvivalent* deyiladi va $A \sim B$ ko'rinishda belgilanadi. Masalan, natural sonlar to'plami N barcha juft sonlar to'plami M bilan ekvivalent.

Haqiqatan ham, natural sonlar to'plami N bilan barcha juft sonlar to'plami M orasida o'zaro bir qiymatli moslikni o'rnatish oson, har bir natural son $n \in \mathrm{N}$ ga $m = 2n \in \mathrm{M}$ juft soni mos keladi va aksincha.

Ikkita chekli to'plam orasida ekvivalentlikni o'rnatishning ikkita yo'li bor:

1) to'plamlar elementlari orasida bevosita o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish orqali;

2) to'plamlar elementlarini sanash va ularni har biridagi elementlar sonini taqqoslash yo'li bilan.

Masalan, agar $A = \{1, 2, 3\}$ va $B = \{stol, stul, parta\}$ bo'lsa, u holda bu to'plamlar chekli ekvivalent bo'lib, har bir to'plam uchta elementga ega. Agar n elementdan tashkil topgan chekli to'plamning elementlarini biror tarzda 1, 2, 3, 4, ..., n natural sonlar bilan nomerlash mumkin bo'lsa, u tartiblangan deyiladi.

Masalan, guruhdagi talabalar to'plami tartiblangan, chunki ularning ism-shariflarini guruh jurnalida natural sonlar yordamida tartiblash mumkin.

5-ta'rif. B to'plamning barcha elementlari A to'plamda mavjud bo'lib, shu bilan birga A da B ga tegishli bo'lmagan elementlar ham mavjud bo'lsa, B to'plam A to'plamning xos qism to'plami deyiladi.

6-ta'rif. A to'plamning o'zi va $\varnothing$ to'plam shu A to'plamning xosmas qism to'plami deyiladi.

7-ta'rif. Har qanday to'plamning xos qism to'plami deb qaralmagan to'plam universal to'plam deyiladi va U bilan belgilanadi.

U universal to'plamning barcha qism to'plamlari orasida ikkita xosmas qism to'plam mavjud bo'lib, ulardan biri U ning o'zi, ikkinchisi esa bo'sh to'plam, qolganlari esa xos qism to'plamlar bo'ladi.

4.1.2. TO'PLAMLAR USTIDA AMALLAR

Ta'rif. a, b, c, d, elementlar A va B to'plamlarning har birida mavjud bo'lsa, ular bu to'plamlarning *umumiy elementlari* deyiladi.

Masalan, $A = \{a, b, c, d, e, f\}$; $B = \{a, b, d\}$ to'plamlar uchun a, b, d — umumiy elementlar.

1) *to'plamlar kesishmasi (ko'paytmasi).* A va B to'plamlarning umumiy elementlaridangina tuzilgan C to'plam A va B to'plamlarning *kesishmasi (ko'paytmasi)* deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$C = A \cdot B \quad \text{yoki} \quad C = A \cap B,$$

bu yerda: $\cap$ belgi to'plamlarning kesishmasini bildiradi.

Bitta ham umumiy elementga ega bo'lmagan to'plamlarning kesishmasi $\varnothing$ bo'sh to'plamga teng.

Masalan, 1) $A = \{a, b, c, d, e\}$ va $B = \{a, c, d, e, b\}$ to'plamlar uchun: $A \cap B = \{a, b, c, d, e\}$.

2) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{5, 6, 7, 8\}$ va $C = \{5, 6, 9, 10, 11\}$ to'plamlarning kesishmasi ushbuga teng: $A \cap B \cap C = \{5, 6\}$.

3) $A = \{2, 3, 4\}$ va $B = \{7, 8, 9\}$ to'plamlarning kesishmasi ushbuga teng: $A \cap B = \varnothing$.

To'plamlarning kesishmasi geometrik nuqtayi nazardan figuraning kesishmasiga mos keladi. 66-*a* chizmada shtrixlangan qism A va B to'plamlar kesishmasini, 66-*b* chizmada CB kesma AB va CD kesmalar kesishmasini ifodalaydi.

66-*d* chizmada EF va KL kesmalar kesishmaydi, demak kesishma bo'sh to'plam.

Xususiy holda: $A \cap A \cap A \ldots = A \quad A \cap \varnothing = \varnothing$.

Yuqoridagi xulosalar to'plamlar soni ikkitadan ortiq bo'lgan hol uchun ham to'g'ri.

2) *to'plamlar birlashmasi (yig'indisi).* Berilgan A va B to'plamlarning *birlashmasi (yig'indisi)* deb shu A va B to'plamlarning har biridagi hamma elementlardangina tuzilgan C to'plamga aytamiz. Yig'indi $C = A + B$ yoki $C = A \cup B$ ko'rinishda belgilanadi.

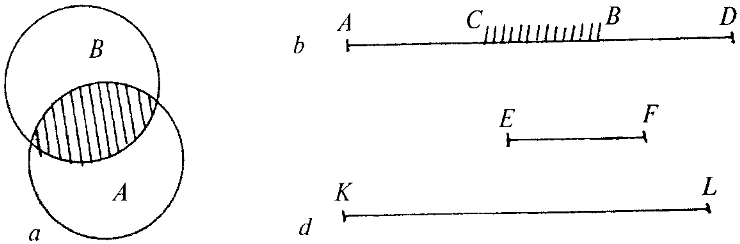
To'plamlarda har bir element bir martagina olinishi lozim bo'lgani uchun, to'plamlardan har ikkalasining umumiy elementlari C yig'indida bir martagina olinadi.

Misollar

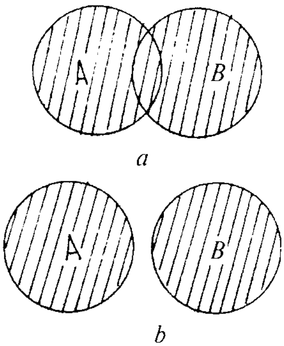
1) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ to'plamlarning birlashmasi ushbuga teng: $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$;

2) $A = \{3, 4, 5, 6\}$ va $B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ to'plamlar uchun $A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ga teng.

To'plamlarning birlashmasi geometrik nuqtayi nazardan figuralarning barcha nuqtalaridan tashkil topgan to'plamni bildiradi.



66-chizma.



67-chizma.

67-a, b chizmalar shtrixlangan yuza A va B to‘plamlarning birlashmasini bildiradi.

Xususiy holda: $A \cup A \cup A \cup ... = A$
$A \cup \varnothing = A$.

Agar $B \subset A$ bo‘lsa, $A \cup B = A$ dir.

To‘plamlar soni ikkitadan ortiq bo‘lganda ham birlashma uchun chiqarilgan xulosalar to‘g‘ri bo‘ladi.

3) *to‘plamlar ayirmasi.* Berilgan A va B to‘plamlarning *ayirmasi* deb shunday to‘plamga aytiladiki, u A ning B da mavjud bo‘lmagan hamma elementlaridangina tuziladi va quyidagicha belgilanadi:

$$C = A - B \quad \text{yoki} \quad C = A \setminus B.$$

M i s o l l a r

1) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ va $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ uchun $R = A \setminus B = \{1, 2\}$;

2) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ va $B = \{6, 7, 8\}$ uchun $R = A \setminus B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

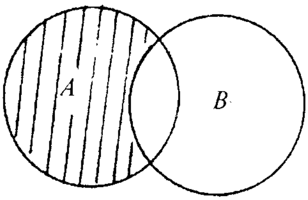
3) $A = \{1, 2, 3\}$ va $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ uchun $R = A \setminus B = \varnothing$.

To‘plamlarning (A va B ning) ayirmasi geometrik nuqtayi nazardan 68-chizmada ko‘rsatilgan shtrixlangan yuzni bildiradi.

Xususiy holda:

$$A \setminus A = \varnothing,$$
$$A \setminus \varnothing = A.$$

4) *to‘plamga to‘ldiruvchi.* A to‘plam va uning B qismi berilgan bo‘lsin, ya’ni $B \subset A$; A dagi B ga kirmay qolgan hamma elementlardangina tuzilgan qism B ning to‘ldiruvchisi deb ataladi va $\overline{B}$ ko‘rinishda belgilanadi.



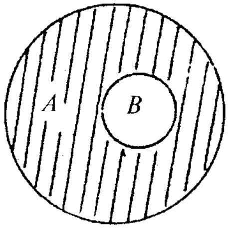
68-chizma.

Bunda $\overline{B}$ qism to‘plam B ni A gacha to‘ldiradi, ya’ni B va $\overline{B}$ ning birlashmasi xuddi A ga teng bo‘ladi.

Masalan, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ va $B = \{2, 5, 6, 9\}$ bo‘lsa, $\overline{B} = \{1, 3, 4, 7, 8\}$ bo‘ladi.

Agar A to'plam biror boshqa to'plamning qismi deb qaralmasa, u holda A to'plamning to'ldiruvchisi $\varnothing$ bo'sh to'plam bo'lib, $\varnothing$ ning to'ldiruvchisi esa A bo'ladi, ya'ni $A = \varnothing$ va $\varnothing = A$.

Agar $A \supset B$ bo'lsa, u holda $A \setminus B$ ayirma B to'plamni A to'plamga to'ldiruvchisi deyiladi, bu 69-chizmada ifodalangan.



69-chizma.

Ushbu tengliklarga egamiz:

$$B \cap \overline{B} = \varnothing;\ A \cup \overline{B} = A;\ B \setminus \overline{B} = B;\ \overline{B} - B = \overline{B}.$$

1-eslatma: A va B to'plamlarning aqalli bittasida ikkinchisiga kirmaydigan elementlar mavjud bo'lsa, A va B lar tengmas to'plamlar deymiz. Buni quyidagicha belgilaymiz: $A \neq B$.

4.1.3. TO'PLAMLARNING TO'G'RI KO'PAYTMASI

A va B to'plamlarning *to'g'ri ko'paytmasi* deb shunday to'plamga aytiladiki, u to'plam elementlari tartiblangan $(x; y)$ juftlardan iborat bo'lib, bu juftning birinchisi A to'plamdan, ikkinchisi esa B to'plamdan olinadi.

To'g'ri ko'paytma $A \times B$ ko'rinishda belgilanadi.

Misol. $A = \{4, 5, 7\}$ va $B = \{-1, 2, 4, 3\}$ to'plamlar berilgan bo'lsin. U holda A va B to'plamlarning to'g'ri ko'paytmasi quyidagicha bo'ladi:

$A \times B = \{(4; -1); (4; 2); (4; 4); (4; 3); (5; -1); (5; 2); (5; 4); (5; 3); (7; -1); (7; 2); (7; 4); (7; 3)\}$.

Agar biz to'g'ri ko'paytma elementi (x, y) dagi x ni biror nuqtani abssissasi, y ni esa ordinatasi desak, *u* holda bu to'g'ri ko'paytma tekislikdagi nuqtalar to'plamini ifodalaydi. Boshqacha aytganda, haqiqiy sonlar to'plami R ning R ga to'g'ri ko'paytmasi R×R ni tasvirlaydi.

4.2. HAQIQIY SONLAR TO'PLAMI

4.2.1. RATSIONAL SONLAR

Kishilik jamiyatida turmushning talabi asosida son to'g'risida tushuncha paydo bo'lgan. Masalan, narsalarni sanashga ehtiyoj natijasida natural sonlar kelib chiqqan. Boshqacha aytganda, bu to‘plamda qancha element bor, degan savolga javob berish natural sonlar to‘plami tushunchasiga olib kelgan.

Natural sonlar to‘plami N bilan belgilanadi. Natural sonlar to‘plamiga 0 soni qo‘shilsa, manfiy bo‘lmagan butun sonlar to‘plami $Z_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\} = N\cup\{0\}$ ni hosil qilamiz. Ammo amaliyotda musbat sonlar bilan birga tabiatda bo‘ladigan hodisalarni o‘rganishda manfiy sonlarni kiritishga to‘g‘ri keldi. Masalan, havoning 0 gradusdan yuqori va pastki temperaturasini belgilash uchun musbat yo‘nalishga qarama-qarshi manfiy yo‘nalish kiritishga to‘g‘ri keladi.

Shuning uchun 4 soniga — 4 soni qarama-qarshi sanaladi va hokazo. Umuman aytganda, *n* soniga qarama-qarshi — *n* soni hisoblanadi va aksincha. Natural sonlar, nol va natural sonlarga qarama-qarshi sonlar, birgalikda butun sonlar Z to‘plamini tashkil qiladi:

$$Z = N\cup\{0\}\cup\overline{N},$$

bu yerda $\overline{N}$ — natural sonlarga qarama-qarshi sonlar. Kattaliklarni yanada aniqroq o‘lchash butun sonlar to‘plamini kengaytirib, kasr sonlarni kiritishga olib keldi. Masalan, daraxtning balandligini o‘lchashda ko‘pincha u butun sonlar bilan ifodalanmasligi mumkin yoki vaqtni hisoblashda minutlar soat o‘lchovining ma’lum qismini tashkil qilishi mumkin (Daraxtning balandligi 5,7 m ni, 15 min 1/4 soatni tashkil qiladi). Butun va kasr sonlar birgalikda *ratsional sonlar* to‘plamini tashkil qiladi. Har qanday ratsional son $\frac{m}{n}$ ko‘rinishida belgilanadi, bu yerda $m\in Z$, $n\in N$ (ya’ni surat butun, maxraj natural sonlar). Masalan, $\frac{5}{1}, -\frac{3}{5}$ va hokazo.

Butun sonni ham $\frac{m}{1}$ ko‘rinishda yozish mumkin. Bizga $\frac{m}{n}$ ko‘rinishdagi ratsional son berilgan bo‘lsa, unda *m* ni *n* ga bo‘lish natijasida chekli yoki cheksiz o‘nli kasrlar hosil bo‘ladi. Masalan, $\frac{1}{4} = 0,25$; $\frac{2}{3} = 0,666...$; $-\frac{3}{4} = -0,75$.

Maxrajning tuzilishiga qarab, kasrlar ichida cheksiz davriy o‘nli kasrlar bo‘lishi mumkin:

Masalan, $\frac{1}{3} = 0,333... = 0,(3)$,

$$\frac{1}{6} = 0,16666... = 0,1(6).$$

Bundan ko‘rinadiki, har qanday ratsional son cheksiz davriy o‘nli kasr ko‘rinishida tasvirlanishi ham mumkin.

Chekli o‘nli kasrni cheksiz davriy kasr ko‘rinishida yozish mumkin. Masalan,

$$\frac{1}{5} = 0,2 = 0,2000...0,(2),$$

$$\frac{3}{4} = 0,75 = 0,75000... = 0,75(0).$$

4.2.2. RATSIONAL SONLAR TO‘PLAMINI KENGAYTIRISH ZARURLIGI

Amaliy ehtiyojlar, matematikaning ehtiyojlari, uning mantiqiy rivojlanishi ratsional sonlar to‘plami turli masalalarni hal etishda yetarli emasligini ko‘rsatadi. Masalan, tomoni 1 o‘lchov birligiga teng bo‘lgan kvadrat berilgan, bu kvadrat diagonalining uzunligini ifodalovchi x sonni topish lozim. Pifagor teoremasiga ko‘ra: $x^2 = 2$ yoki $x = \sqrt{2}$.

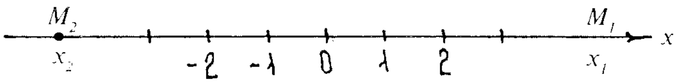
Shunday qilib, masala kvadrat tenglamani yechishga keltirildi. Lekin, butun sonlar orasidagi kvadrati 2 ga teng sonni topa olmaymiz, chunki $1^2 < 2$, $2^2 > 2$.

Demak, izlanayotgan sonni kasrlar orasida topishga urinib ko‘rish, ya’ni $x = \frac{m}{n}$ deb olish lozim (m va n sonlar o‘zaro tub, albatta, aks holda ularni qisqartirgan bo‘lar edik).

Bu masalani tekshirish quyidagi teoremaga olib keladi.

1-teorema. *Kvadrati 2 ga teng bo‘lgan ratsional son mavjud emas.*

I s b o t. Kvadrati 2 ga teng bo‘lgan ratsional son mavjud, deb faraz qilamiz, ya’ni $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ tenglik o‘rinli bo‘lsin, bu yerda m va n o‘zaro tub sonlar, u holda $m^2 = (2n)^2$, bundan m^2 natural son juft ekanligi kelib chiqadi, bu holda esa m sonning o‘zi ham juft, chunki haqiqatan ham, agar toq bo‘lsa, u holda $m^2 = (4k^2 + 4k) + 1$ ham toq, chunki, $(4k^2 + 4k)$ juft, bundan esa $m = 2k$ bo‘lib $n^2 = 2k^2$ ekanligi, ya’ni n^2 son juftligi kelib chiqadi. Shunday qilib, m va n sonlarning ikkalasi ham juft, ya’ni ular o‘zaro tub emas, degan xulosaga keldik, bu esa ular o‘zaro tub degan dastlabki farazimizga ziddir. Teorema isbot qilindi: $\sqrt{2}$ — irratsional son. $\sqrt{2} \approx 1,411421356...$, shuningdek, ko‘p uchraydigan va π orqali belgilanadigan aylana uzunligining diametriga nisbati hisoblangan son ham irratsional son: $\pi \approx 3,1415926...$



70-chizma.

1-ta'rif. Ratsional va irratsional sonlar to'plami birgalikda *haqiqiy sonlar* deyiladi. (Haqiqiy sonlar to'plami deb cheksiz o'nli kasrlarga aytiladi).

Haqiqiy sonlar to'plami R bilan belgilanadi. Haqiqiy sonlarni sonlar o'qining nuqtalari bilan tasvirlash mumkin.

Agar cheksiz to'g'ri chiziqda:

1) sanoq boshi hisoblangan 0 nuqta;

2) strelka bilan ko'rsatilgan musbat yo'nalish;

3) uzunlikni o'lchash uchun masshtab berilsa, u to'g'ri chiziq *sonlar o'qi* deyiladi. Agar x_1 son musbat bo'lsa, u 0 nuqtadan o'ngda $OM = x_1$ masofada yotuvchi M_1 nuqta bilan tasvirlanadi. Agar x_2 manfiy bo'lsa, u 0 nuqtadan chapda $OM_2 = x_2$ masofada yotuvchi M_2 nuqta bilan tasvirlanadi (70-chizma).

Sonlar o'qining har bir nuqtasi bitta haqiqiy sonni ifodalaydi. Ixtiyoriy ikkita haqiqiy son orasida bitta ratsional yoki irratsional son topiladi. Ayrim hollarda R haqiqiy sonlar to'plamini sonlar to'g'ri chizig'i, haqiqiy sonlarning o'zini esa bu to'g'ri chiziqning nuqtalari deb ataladi.

4.2.3. HAQIQIY SONNING ABSOLUT QIYMATI (MODULI)

1-ta'rif. x haqiqiy sonning *absolut qiymati* (yoki *moduli*) deb quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi manfiy bo'lmagan haqiqiy songa aytiladi, x sonning absolut qiymati $|x|$ bilan belgilanadi:

$$x > 0 \text{ bo'lsa, } |x| = x;$$
$$x = 0 \text{ bo'lsa, } |x| = 0;$$
$$x < 0 \text{ bo'lsa, } |x| = -x.$$

Misollar: $|3{,}12| = 3{,}12$, $|0| = 0$, $|-2{,}7| = -(-2{,}7) = 2{,}7$, $|\cos x - 2| = -(\cos x - 2) = 2 - \cos x$.

Istalgan x haqiqiy son uchun $x^2 \leq |x|$ tengsizlik o'rinli ekanligi ta'rifdan ko'rinadi.

Haqiqiy sonlarning absolut qiymati ta'rifidan kelib chiqadigan teoremalarni ko'rib o'tamiz.

1-teorema. *Ikki yoki bir necha qo'shiluvchilar yig'indisining absolut qiymati, qo'shiluvchilarning absolut qiymatlari yig'indisidan katta emas:* $|x+y| \leq |x|+|y|$.

Isbot. Aytaylik, $|x+y| \geq 0$ bo'lsin, u holda ta'rifga ko'ra: $|x+y| = x+y \leq |x|+|y|$, chunki, $x \leq |y|$; $y \leq |y|$. Endi $x+y \leq 0$ bo'lsin, u holda ta'rifga ko'ra: $|x+y| = -(x+y) = (-x)+(-y) \leq |x|+|y|$. Demak, $|x+y| \leq |x|+|y|$.

Keltirilgan isbot qo'shiluvchilar soni bir necha bo'lgan hol uchun ham oson umumlashtiriladi.

2-teorema. *Ikki son ayirmasining absolut qiymati bu sonlar absolut qiymatlarining ayirmasidan kichik emas:* $|x-y| \geq |x|-|y|$.

Isbot. $x-y=z$ deb olamiz, u holda 1-teoremaga ko'ra: $|x| = |y+z| \leq |y|+|z| = |y|+|x-y|$, bundan esa $|x| - |y| \leq |x-y|$. Demak, $|x-y| \geq |x|-|y|$.

3-teorema. *Ko'paytmaning absolut qiymati ko'paytuvchilar absolut qiymatlarining ko'paytmasiga teng:* $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

Isbot. Aytaylik, $x>0$ va $y>0$ bo'lsin. Ta'rifga ko'ra: $|x| = x$, $|y| = y$, u holda $x \cdot y > 0$ bo'lgani uchun ta'rifga asosan: $|x \cdot y| = x \cdot y$. Bundan esa $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ ga ega bo'lamiz.

Endi $x<0$ va $y<0$ deb faraz qilamiz. U holda $(-x)>0$, $(-y)>0$ va ta'rifga ko'ra $|x| = -x$, $|-y| = -y$ bo'ladi.

Oldingi holdan foydalansak, $|x \cdot y| = |-(x)\cdot(-y)| = (-x)\times(-y) = |x| \cdot |y|$ ga ega bo'lamiz. Endi x va y lar qarama-qarshi ishorali bo'lgan holni tekshiramiz. Aniqlik uchun $x<0$ va $y>0$ bo'lsin. $x \cdot y < 0$ va $|x| = -x$ bo'lganidan va absolut qiymat ta'rifidan foydalansak, $|x \cdot y| = -(x \cdot y) = (-x)\cdot y = |x| \cdot |y|$ ga ega bo'lamiz.

4-teorema. *Bo'linmaning absolut qiymati bo'linuvchi va bo'luvchi absolut qiymatlarining bo'linmasiga teng:*

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}; \quad (y \neq 0).$$

Bu teorema isboti ham absolut qiymat ta'rifidan bevosita kelib chiqadi.

4.2.4. SONLI TO'PLAMLAR. ORALIQLAR. NUQTANING ATROFI. HAQIQIY SONLAR TO'PLAMINING BA'ZI BIR TO'PLAM OSTILARI

1-ta'rif. $a \le x \le b$ qo'sh tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha haqiqiy sonlar (to'g'ri chiziqdagi nuqtalar) to'plami *yopiq oraliq* yoki boshi a, oxiri b nuqtadagi *kesma* deb ataladi va $[a; b]$ orqali belgilanadi. $b - a$ songa $[a; b]$ kesmaning uzunligi deyiladi.

2-ta'rif. $a < x < b$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x haqiqiy sonlar to'plami *ochiq oraliq* yoki *interval* deb ataladi va $(a; b)$ orqali belgilanadi. $b - a$ songa $(a; b)$ interval uzunligi deyiladi.

3-ta'rif. $a \le x < b$ yoki $a < x \le b$ tengsizlikni qanoatlantiradigan x haqiqiy sonlar to'plami *yarim oraliq* deb ataladi va mos ravishda $[a; b)$ yoki $(a; b]$ orqali belgilanadi.

4-ta'rif. $x > a$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x haqiqiy sonlar to'plami *cheksiz oraliq* deyiladi va $(a; +\infty)$ ko'rinishda belgilanadi.

Shunga o'xshash, $x < b$, $x \ge 0$, $x \le b$ tengsizliklar mos ravishda $(-\infty; b)$, $[a; +\infty)$, $(-\infty; b]$ oraliqlar bilan aniqlanadi. Ayrim hollarda haqiqiy sonlar to'plami ham cheksiz oraliq deyiladi va $(-\infty; +\infty)$ ko'rinishida belgilanadi.

5-ta'rif. Berilgan x_0 nuqtani o'z ichiga oladigan har qanday oraliq (interval) x_0 nuqtaning *atrofi* deyiladi. Odatda x_0 nuqtaning $\varepsilon(\varepsilon > 0)$ atrofi tushunchasi kiritiladi, bu $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ interval orqali ham belgilanadi.

4.2.5. CHEGARALANGAN VA CHEGARALANMAGAN SONLAR TO'PLAMI. SONLAR TEKISLIGI

1-ta'rif. Agar E sonli to'plamning barcha x elementlari uchun $x \le M(x \ge M)$ tengsizlikni qanoatlantiradigan M son mavjud bo'lsa, u holda E to'plam *yuqoridan (quyidan) chegaralangan* deyiladi. M soni (m soni) E sonli to'plamning yuqori (quyi) chegarasi deyiladi.

Masalan, 1) barcha natural sonlar to'plami quyidan 1 soni bilan chegaralangan; 2) manfiy sonlar to'plami yuqoridan 0 soni bilan chegaralangan.

Ta'rifdan ko'rinadiki, sonli to'plam cheksiz quyi va yuqori chegaralarga ega bo'lishi mumkin. Masalan, M_1 soni to'plamning yuqori chegarasi desak, u holda shunday $M_2 > M_1$ soni mavjudki, M_2 soni ham sonli to'plam uchun yuqori chegara bo'ladi, chunki $x \le M_1 \le M_2$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Masalan, manfiy sonlar to'plami uchun yuqori chegara faqat 0 soni bo'lmasdan, undan katta sonlar ham yuqori chegara bo'ladi.

2-ta'rif. E to'plamning barcha yuqori chegaralarining eng kichigi E to'plamning *aniq quyi chegarasi*, E to'plamning barcha quyi chegaralarining eng kattasi E to'plamning *aniq yuqori chegarasi* deyiladi. Aniq quyi chegara *infE* (*infimum* — eng kichik), aniq yuqori chegara *supE* (*supremum* — eng katta) bilan belgilanadi.

Eslatma. To'plamning yuqori va quyi chegaralari to'plamga tegishli bo'lmasligi ham mumkin.

3-ta'rif. Quyidan va yuqoridan chegaralangan E to'plam *chegaralangan to'plam* deyiladi.

Masalan, 1) ixtiyoriy kesma chegaralangan to'plam, chunki uning quyi chegarasi kesmaning chap oxiri, yuqori chegarasi kesmaning o'ng oxiri hisoblanadi; 2) barcha to'g'ri kasrlar to'plami chegaralanmagan to'plam.

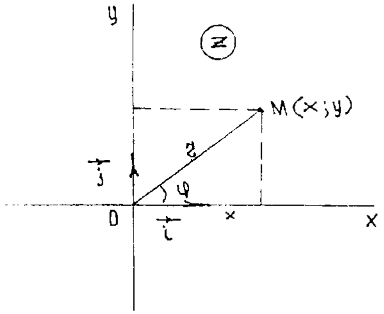
Biz yuqorida haqiqiy sonlarni to'g'ri chiziqning nuqtalari bilan ifodalash mumkinligini aytgan edik. Shunga o'xshash koordinatalar tekisligini nuqtalar bilan tartiblangan haqiqiy sonlar tekisligi deyish mumkin, istalgan sonlar juftini esa shu tekislikning nuqtalari deyiladi. Sonlar tekisligi R^2 bilan belgilanadi.

4.3. KOMPLEKS SONLAR

4.3.1. KOMPLEKS SONLAR TO'PLAMI. KOMPLEKS SON

Ixtiyoriy ko'rinishdagi algebraik tenglamalarni yechishda haqiqiy sonlar to'plami yetarli emas. Haqiqatan ham, sonlar to'plamida diskriminanti manfiy bo'lgan kvadrat tenglama, masalan, $x^2 + 1 = 0$ tenglama yechimga ega emas.

Bu qiyinchilikdan qutilish maqsadida kompleks sonlar to'plami kiritiladi. Bu to'plamga haqiqiy sonlar to'plami to'plam osti sifatida kiradi. Kompleks sonlar to'plami C bilan belgilanadi. $x^2 + 1 = 0$; $D < 0$ tenglama yechimi kompleks sonlar to'plamida bor, deb, ya'ni $i = \sqrt{-1}$ bilan belgilanuvchi mavhum birlik kiritamiz. Bu mavhum birlik yuqoridagi tenglamaning yechimi bo'ladi, ya'ni $i^2 + 1 = 0$; $i^2 = -1$. Shunday qilib, biz haqiqiy sonlar to'plamini bi mavhum sonlar bilan



71-chizma.

to'ldiramiz. Haqiqiy a sonini mavhum bi soniga qo'shishdan $a + bi$ kompleks sonini hosil qilamiz.

1-ta'rif. $a + bi$ ifodaga *kompleks son* deyiladi (bunda a, b haqiqiy sonlar, i esa mavhum birlik, a — kompleks sonining haqiqiy, bi — mavhum qismlari). Agar $a_1 + b_1 i$ va $a_2 + b_2 i$ kompleks sonlarda $a_1 = a_2$; $b_1 = b_2$ bo'lsa, ular teng deyiladi. Odatda kompleks son bitta z harf bilan belgilanadi.

$z = a + bi$ kompleks sonning haqiqiy va mavhum qismi nolga teng bo'lsa, ya'ni $a = 0$ va $b = 0$ bo'lsa, u nolga teng bo'ladi.

Mavhum qismlari bilan farq qiluvchi $z = a + bi$ va $z = a - bi$ kompleks sonlar *qo'shma* deyiladi. Haqiqiy va mavhum qismlarning ishoralari bilan farq qiluvchi ikkita $z_1 = a + bi$ va $z_2 = -a - bi$ kompleks sonlar *qarama-qarshi* kompleks sonlar deyiladi.

Kompleks sonni geometrik tasvirlash uchun $R = \{0; \vec{i}; \vec{j}\}$ koordinatalar sistemasida abssissalar o'qiga $z = a + bi$ kompleks sonning haqiqiy qismi a ni, ordinatalar o'qiga esa mavhum qismining koeffitsiyenti b ni joylashtirsak, tekislikda $(a; b)$ nuqtaga ega bo'lamiz. Shu nuqta $a + bi$ kompleks sonni geometrik tasviri deb qabul qilinadi. Odatda bu z nuqta deyiladi. Shunday qilib, tekislikning har bir nuqtasi bitta kompleks sonni ifodalaydi. Boshqacha aytganda, tekislik nuqtalari bilan kompleks sonlar to'plami o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatiladi. Ox o'qida kompleks sonni haqiqiy qismi joylashgani uchun *haqiqiy o'q*, ordinatalari o'qida mavhum qismga tegishli son joylashgani uchun *mavhum o'q*, xOy tekisligining o'zini esa *kompleks tekislik* deyiladi.

Kompleks tekislik Z bilan belgilanadi.

4.3.2. KOMPLEKS SONNING TRIGONOMETRIK SHAKLI

$z = x + yi$ ko'rinishdagi son algebraik ko'rinishdagi kompleks son deyiladi. Kompleks sonning trigonometrik shaklini hosil qilish uchun 71-chizmadan foydalanamiz. Chizmadan:

$$x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi, \tag{1}$$

bunda: r — kompleks soni z ni tasvirlagan vektorning uzunligini ifodalaydi va unga z sonning moduli, φ burchakni esa z ning *argumenti* deyiladi.

$$(1) \Rightarrow |z| = |x + yi| = r = \sqrt{x^2 + y^2}\,. \tag{2}$$

Argument bir qiymatli aniqlanmay, balki $2\pi k$ qo'shiluvchi qadar aniqlikda aniqlanadi, bunda k — butun son. Argumentning barcha qiymatlari orasidan $0 \le \varphi \le 2\pi k$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi bittasini tanlaymiz. Bu qiymat *bosh qiymat* deyiladi va tubandagicha belgilanadi: $\varphi = \arg z$.

(1) tengliklarni hisobga olib, kompleks sonni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$(1) \Rightarrow z = x + yi \Rightarrow r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{3}$$

bu yerda:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,;$$

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{agar } x > 0;\ y > 0 \text{ bo'lsa;} \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa;} \\ 2\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{agar } x > 0,\ y < 0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

(3) ga kompleks sonning *trigonometrik shakli* deyiladi.

1-misol. Kompleks sonning moduli 3 ga, argumenti $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ga teng bo'lsa, uning haqiqiy va mavhum qismlarini toping.

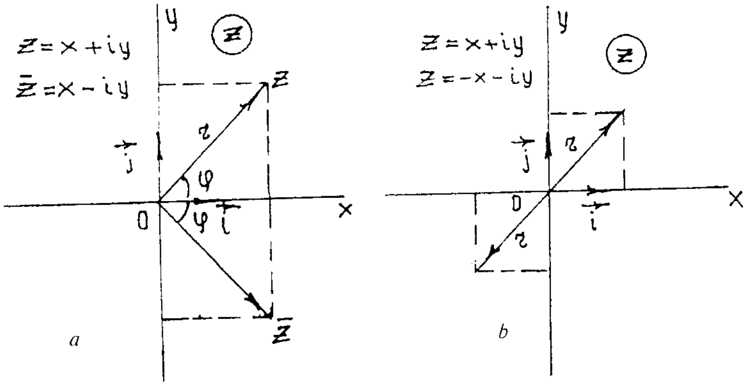
Yechish. (1) formuladan:

$$x = r\cos\varphi = 3\cos\frac{\pi}{4} = 3\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$y = r\sin\varphi = 3\sin\frac{\pi}{4} = 3\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2-misol. $z = i$ kompleks sonning argumentini toping.

Yechish. $x = 0$; $y = 1$; $r = 1$; $\varphi = \frac{\pi}{2}$.



72-chizma.

3-m i s o l. Qo'shma va qarama-qarshi sonlarni chizmada tasvirlang va izohlang.

Y e c h i s h. 72-chizmadan ko'rinadiki, qo'shma kompleks sonlar bir xil modulga ega va absolut qiymatlari bo'yicha teng argumentlarga ega bo'lib, haqiqiy o'qqa simmetrik bo'lgan nuqtalar bilan tasvirlanadi, ya'ni qarama-qarshi kompleks sonlar koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik nuqtalar bilan tasvirlanadi (72-chizma).

4-m i s o l. $z = 1 - i$ kompleks sonni trigonometrik shaklda ifodalang.

Y e c h i s h.

$$x = 1;\ \ y = -1;\ \ r = \sqrt{2};$$

$$\mathrm{tg}\varphi = -1;\ \ \varphi = 2\pi - \mathrm{arctg}(1) = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}.$$

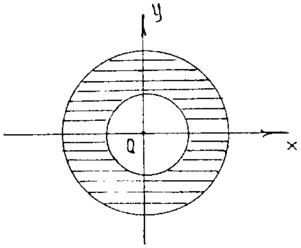
Shunday qilib,

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

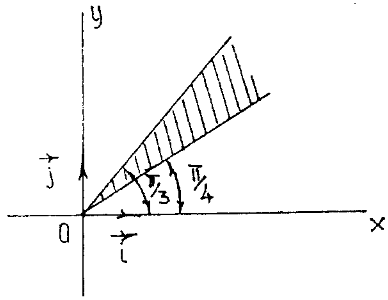
Endi kompleks sonlar to'plamining ba'zi bir to'plam ostilarini ifodalovchi munosabatlarni geometrik nuqtayi nazardan ko'rib o'taylik.

a) $|z| = 2$, bu munosabat kompleks tekisligida markazi koordinatalar boshida, radiusi 2 ga teng bo'lgan aylananing nuqtalarini ifodalaydi;

b) $2 \le |z| \le 3$ munosabat esa markazi koordinatalar boshida joylashib, ichki radiusi 2 ga teng bo'lgan konsentrik joylashgan aylanalar bilan chegaralangan halqa ichidagi nuqtalar to'plamini ifodalaydi (73-chizma).



73-chizma.



74-chizma.

d) $\operatorname{arctg} z = \frac{\pi}{6}$ munosabatga kompleks tekislikda koordinatalar boshidan 30° burchak ostida chiquvchi nurdagi nuqtalar to'plami mos keladi.

e) $\frac{\pi}{4} \le \arg z \le \frac{\pi}{3}$ munosabatga esa kompleks tekislikdagi koordinatalar boshidan 45° va 60° burchak ostida chiquvchi nurlar bilan chegaralangan nuqtalar to'plami hamda nurlar ustida yotuvchi nuqtalar to'plami kiradi (74-chizma).

4.3.3. KOMPLEKS SONLAR USTIDA AMALLAR

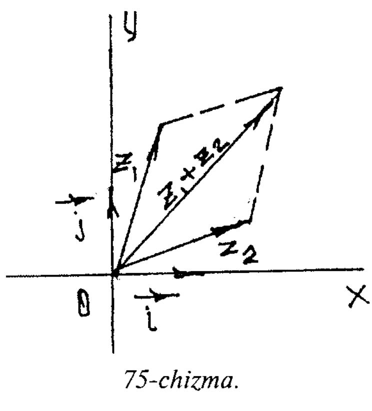
Kompleks sonlarni qo'shish. $z_1 = a_1 + b_1 i$ va $z_2 = a_2 + b_2 i$ kompleks sonlarning yig'indisi deb $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$ tenglik bilan aniqlanuvchi songa aytiladi. Kompleks sonlarni qo'shish vektorlarni qo'shish formulasidan vektorlar bilan ifodalangan kompleks sonlarni qo'shish qoidasi bo'yicha bajarilishi ko'rinadi (75-chizma).

M i s o l. $z_1 = 2 + 5i$ va $z_2 = -1 - 3i$ kompleks sonlarni yig'indisini toping.

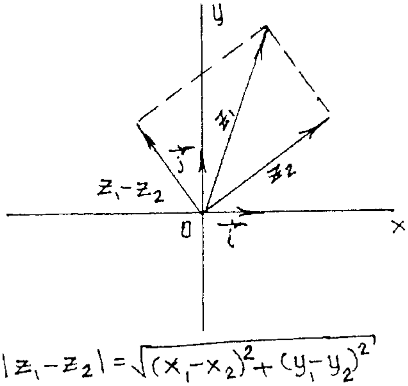
Y e c h i s h.

$$z_1 + z_2 = (2 + 5i) + (-1 - 3i) =$$
$$= (2 - 1) + i(5 - 3) = 1 + 2i.$$

Kompleks sonlarni ayirish. $z_1 = a_1 + b_1 i$ va $z_2 = a_2 + b_2 i$ kompleks sonlarning ayirmasi deb shunday kompleks songa aytiladiki, unga ayriluvchi kompleks sonni qo'shganda kamayuvchi kompleks son hosil bo'ladi:



75-chizma.



76-chizma.

$$z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2).$$

Ikkita kompleks son ayirmasining moduli shu sonlarni kompleks sonlar tekisligida tasvirlovchi nuqtalar orasidagi masofaga teng (76-chizma).

M i s o l. $z_1 = 6 + 5i$ va $z_2 = 4 - 2i$ kompleks sonlarning ayirmasini toping.

Y e c h i s h. $z_1 = 6 + 5i$ va $z_2 = 4 - 2i$ lar berilgan. $z_1 - z_2 = (6 + 5i) - (4 - 2i) = (6 - 4) + i(5 + 2) = 2 + 7i$.

Kompleks sonlarni ko'paytirish. $z_1 = a_1 + b_1 i$ va $z_2 = a_2 + b_2 i$ kompleks sonlarning ko'paytmasi deb $i^2 = -1$ ekanligini hisobga olgan holda kompleks sonlarni ikkita ko'phad ko'paytmasi shaklida ko'paytirishdan hosil bo'lgan kompleks songa aytiladi:

$$z_1 \cdot z_2 = a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)i.$$

z_1 va z_2 kompleks sonlar trigonometrik ko'rinishda berilgan bo'lsa, ya'ni $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ va $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ bo'lsa, u holda ularning ko'paytmasi $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$ bo'ladi.

M i s o l. $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ va $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ kompleks sonlarning ko'paytmasini toping.

Y e c h i s h. $z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right] =$

$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt{2i}.$$

Kompleks sonlarni bo'lish. Kompleks sonlarni bo'lish amali ko'paytirish amaliga teskari amal sifatida aniqlanadi. Boshqacha aytganda, $z \cdot z_2 = z_1$ bo'lsa, z soni $z_1 = x_1 + iy_1$ ning $z_2 = x_2 + iy_2$ kompleks songa bo'linmasi deyiladi.

$z = \frac{z_1}{z_2}$ bo'linmani topish uchun surat va maxrajni z_2 ning qo'shmasi $\overline{z}_2$ ga ko'paytiramiz:

$$z = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2}, \quad \text{bundan:} \quad z = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Agar kompleks sonlar trigonometrik ko'rinishda berilgan bo'lsa, ya'ni $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ va $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ bo'lsa, u holda

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Shunday qilib, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$, ya'ni kompleks sonlarni bo'lishda bo'linuvchining moduli bo'luvchining moduliga bo'linadi, argumentlari esa ayriladi.

Misol. $z_1 = \sqrt{3} + i$ ni $z_2 = -3 - 3i$ ga:

a) algebraik; b) trigonometrik ko'rinishda bo'ling.

Yechish.

a) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3}+i}{-3-3i} = \frac{(\sqrt{3}+i)\cdot(-3+3i)}{(-3-3i)\cdot(-3+3i)} = \frac{-3\sqrt{3}-3+(\sqrt{3}-3)i}{9+9} =$$

$$= \frac{-3[\sqrt{3}+1(\sqrt{3}-1)i]}{18} = \frac{-\sqrt{3}-1}{6} + \frac{\sqrt{3}-1}{6}i;$$

b) $$z_1 = \sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right);$$

$$z_2 = -3 - 3i = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right);$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}}{3\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)} = \frac{2}{3\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{2}}\left[\cos\left(-\frac{13\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{13\pi}{12}\right)\right] = \frac{2}{3\sqrt{2}}\left(\cos\frac{13\pi}{12} - i\sin\frac{13\pi}{12}\right) =$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{2}}\left[\cos\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right) - i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right)\right] = \frac{2}{3\sqrt{2}}\left(-\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) =$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{2}} \cdot \left[-\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{2}} \cdot \left[\left(-\cos\frac{\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3} \sin\frac{\pi}{4}\right) + i\left(\sin\frac{\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3} \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{2}} \left[\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = -\frac{\sqrt{3}+1}{6} + i\,\frac{\sqrt{3}-1}{6}.$$

Kompleks sonni darajaga ko'tarish. Kompleks sonlarni ko'paytirish qoidasidan darajaga ko'tarish qoidasi kelib chiqadi. $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ kompleks son uchun n natural bo'lganda: $z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$. Bu formulani *Muavr formulasi* deyiladi. Muavr formulasini tatbiq qilishda $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$ bo'lishini e'tiborga olishimiz kerak.

Misol. $(-1 + i)^5$ ni hisoblang.

Yechish.

$$z = -1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right);$$

$$z^5 = (-1+i)^5 = (\sqrt{2})^5 \cdot \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)^5 =$$

$$= 4\sqrt{2}\left(\cos 5 \cdot \frac{3\pi}{4} + i\sin 5\,\frac{3\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}(\cos 675^\circ + i\sin 675^\circ) =$$

$$= 4\sqrt{2}\left[\cos(720^\circ - 45^\circ) + i\sin(720^\circ - 45^\circ)\right] =$$

$$= 4\sqrt{2}(\cos 45^\circ - i\sin 45^\circ) = 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4 - 4i = 4(1-i).$$

Kompleks sondan ildiz chiqarish. Ildiz chiqarish amali darajaga ko'tarish amaliga teskari amal. Kompleks sonning n-darajali ildizi deb shunday z^* kompleks songa aytiladiki, z^* ning n-darajasi z soniga tengdir, ya'ni

$$(z^*)^n = z.$$

Aytaylik, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ va $z^* = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ bo'lsin. Muavr formulasiga asosan $r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$, bundan $r = \rho^n$, $n\theta = \varphi + 2\pi k$; ρ va θ ni topamiz.

Bu yerda k — istalgan butun son, $\sqrt[n]{r}$ — arifmetik ildiz. Demak, $\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$; bu yerda $k = 0, 1$ ... $n - 1$.

M i s o l. $\sqrt[5]{1}$ ning ildizlarini toping.

Y e c h i s h. $\sqrt[5]{1}$ sonni trigonometrik ko'rinishda yozamiz. $z = 1$ bo'lib, $z = 1 = \cos 0 + i\sin 0$ bo'ladi.

$$\sqrt[5]{1} = \sqrt[5]{\cos 0 + i\sin 0} = \cos\frac{2\pi k}{5} + i\sin\frac{2\pi k}{5}.$$

$$k_0 = 0;\ z_1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1;$$

$$k_1 = 1;\ z_2 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} = \cos 72^\circ + i\sin 72^\circ \approx 0,309 + i0,951;$$

$$k_2 = 2;\ z_3 = \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5} = \cos 144^\circ + i\sin 144^\circ \approx$$

$$\approx -0,809 + i0,587;$$

$$k_3 = 3;\ z_4 = \cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5} = \cos 216^\circ + i\sin 216^\circ \approx$$

$$\approx -0,809 - i0,587;$$

$$k_4 = 4;\ z_5 = \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5} = \cos 288^\circ + i\sin 288^\circ \approx$$

$$\approx -0,309 + i0,951.$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. To'plam deganda nimani tushunasiz?
2. Haqiqiy sonlar to'plamining qism to'plamlarini ko'rsating.
3. To'plamlar birlashmasi, kesishmasi, ayirmasi ta'riflarini aytib bering.
4. To'plamga to'ldiruvchi deganda nimani tushunasiz?
5. To'plamlar ustida amallar qanday xossalarga ega?
6. Sonli to'plam nima?
7. Kompleks sonlar bilan haqiqiy sonlar to'plamining farqi nimada?
8. Kompleks sonlarni qo'shish, ayirishda qanday sonlar hosil bo'ladi, misollar yordamida tushuntiring.
9. Kompleks sonning moduli va argumenti deganda nimani tushunasiz?
10. Kompleks sonni darajaga ko'tarish formulasini keltirib chiqaring.

5-bob. FUNKSIYA. KETMA-KETLIKLAR. LIMITLAR NAZARIYASI

5.1. FUNKSIYA. TESKARI FUNKSIYA. ENG SODDA ELEMENTAR FUNKSIYALAR

5.1.1. FUNKSIYA TUSHUNCHASI. SONLI FUNKSIYA. FUNKSIYANING BERILISH USULLARI

Funksiya tushunchasi matematik tushunchalarning asosiylaridan biri sanaladi. Bu tushuncha matematika bilan turli real hodisalar orasidagi bog'lanishni ochib beradi. Funksiya tushunchasi ikki to'plam elementlari orasidagi bog'lanishni ifodalaydi. Masalan, sinfdagi partalar (ikki o'rinli) to'plami A bilan o'quvchilar to'plami B orasidagi bog'lanishni olib qaraylik: 1 partaga 2 ta o'quvchi, 2 partaga 4 ta o'quvchi, 3 partaga 6 ta o'quvchi va hokazo mos keladi. Boshqacha aytganda, A to'plam elementlari bilan B to'plam elementlari orasidagi biror qonunga mos funksional bog'lanish o'rnatiladi.

Ta'rif. Agar biror f qonunga ko'ra A to'plamning har bir x elementiga B to'plamning yagona y elementi mos kelsa, u holda A to'plamda $f(x)$ *funksiya berilgan* deyiladi va $y = f(x)$, $x \in A$ ko'rinishda belgilanadi, bunda x funksiya *argumenti*, y esa *funksiya qiymati* deyiladi. A to'plam funksiyani *aniqlanish sohasi*, B to'plam esa funksiyaning *qiymatlar sohasi* deyiladi. Funksiyalarni belgilashda faqat f harfidan emas, balki boshqa harflardan ham foydalanish mumkin. Masalan, $y = y(x)$, $y = g(x)$, $y = A(x)$, $y = F(x)$ va boshqalar.

Agar yuqoridagi funksiya ta'rifida A va B to'plamlar $A \subset \mathrm{R}$, $B \subset \mathrm{R}$ bo'lsa, funksiya *sonli funksiya* deyiladi. Biz bu kursimizda sonli funksiyalar bilan ish ko'ramiz va uni bundan keyin qisqacha funksiya deb ishlatamiz. Agar A va B to'plamlar hamda ularning funksional bog'liqlik qonuni berilgan bo'lsa, funksiya berilgan hisoblanadi. Funksiya asosan 3 xil usulda beriladi:

a) ***Analitik usul.*** Bu usulda o'zgaruvchilar orasidagi bog'liqlik formulalar yordamida beriladi.

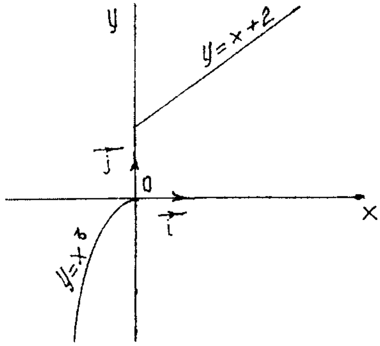
1-misol. $y = x^3$ ifoda aniqlanish sohasi $(-\infty; +\infty)$ sonlar o'qida, qiymatlar to'plami ham sonlar o'qi $(-\infty; +\infty)$ da berilgan funksiyani aniqlaydi.

2-misol. $y = (1-x^2)^{1/2}$ ifoda aniqlanish sohasi $[-1; 1]$ kesmada, qiymatlar to'plami $[0; 1]$ kesmada bo'lgan funksiyani aniqlaydi.

Ayrim hollarda funksiyaning aniqlanish sohasidagi oraliqlarga qarab turli formulalarda berilishi mumkin.

Masalan,

$$y = \begin{cases} x^3, & x < 0; \\ x + 2, & x > 0 \end{cases}$$ (77-chizma).



77-chizma.

Jadval usuli. Funksiya jadval usulida berilganda funksiya argumentlari va unga mos keluvchi funksiya qiymatlari jadvalda keltiriladi. Masalan,

x	0	0,1	0,2	3	0,5	4	2	1,5
y	−2	5	2	−1	−4	0,5	5	3

Jadvaldan ko'rinadiki, funksiyaning aniqlanish sohasi argumentning 8 ta qiymatida bo'lib, unga funksiyaning ham 8 ta qiymati to'g'ri kelgan. Jadvaldagi qiymatlar tajribalardan yoki tajriba natijalarini matematik hisoblashlar natijasida olingan bo'lishi mumkin.

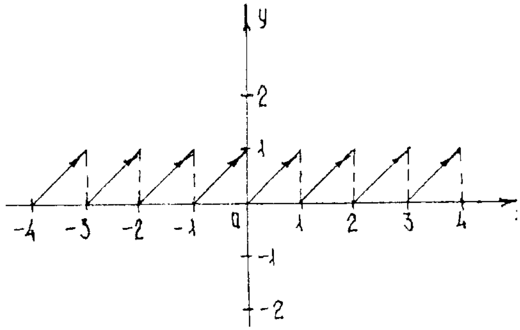
Masalan, kvadratlar, kublar jadvali, logarifmlar jadvali, trigonometrik funksiyalar jadvali va h.k.

Grafik usul. Bu usul asosan funksiyalarni analitik usulda berish qiyin bo'lgan hollarida uchraydi. Ko'pincha, tabiatda ro'y beradigan hodisalarni o'rganish jarayonida apparaturalar yordamida egrilar olinib, ularni o'rganishga to'g'ri keladi. Masalan, ossillografni, elektrokardiogrammalarni ko'rsatishlari funksiyani grafik usulida berilishiga misol bo'la oladi.

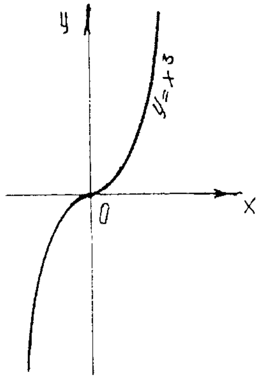
5.1.2. FUNKSIYALARNING MONOTONLIGI, JUFT-TOQLIGI VA DAVRIYLIGI

1-ta'rif. Agar $y = f(x)$ funksiyada har bir x uchun shunday M son mavjud bo'lib, $f(x) \leq M$(1) tengsizlik bajarilsa, $y = f(x)$ funksiya *chegaralangan* deyiladi. (1) tengsizlik geometrik nuqtayi nazaridan chegaralangan funksiyaning grafigi koordinatalar tekisligida $-M \leq y \leq M$ gorizontal polasada joylashishini bildiradi.

Masalan, $y = x-[x]$, $x \in \mathrm{R}$ funksiyaning grafigi butunicha $0 \leq y \leq 1$ polasada joylashgan. Shuning uchun bu funksiya chegaralangan, $y = x^3$ funksiya chegaralanmagan (78, 79-chizmalar).



78-chizma.



79-chizma.

2-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya argumentining ixtiyoriy ikkita $x_1 \in A$, $x_2 \in A$ qiymatlari uchun $x_1 < x_2$ shartda $f(x_1) \leq f(x_2)$ tengsizlik bajarilsa $f(x)$ funksiya *o'suvchi* deyiladi. Agar $f(x_1) < f(x_2)$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya *qat'iy o'suvchi* deyiladi.

3-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya argumentining ixtiyoriy ikkita $x_1 \in$ A va $x_2 \in$ A qiymatlari uchun $f(x_1) \geq f(x_2)$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya kamayuvchi deyiladi. Agar $f(x_1) > f(x_2)$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya *qat'iy kamayuvchi* deyiladi.

Qat'iy o'suvchi, o'suvchi, qat'iy kamayuvchi va kamayuvchi funksiyalar *monoton funksiyalar* deyiladi.

4-ta'rif. Agar A to'plamdagi ixtiyoriy x element uchun $f(-x) = f(x)$ tenglik bajarilsa $y = f(x)$ funksiya *juft* funksiya deyiladi. Agar A to'plamdagi ixtiyoriy x elementi uchun $f(-x) = -f(x)$ tenglik bajarilsa, $y = f(x)$ funksiya toq funksiya deyiladi. $y = x^2$, $x \in$ R funksiya juft funksiya, chunki $y = (-x)^2 = x^2$.

5-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya uchun shunday $T > 0$ son mavjud bo'lib, funksiyaning aniqlanish sohasida olingan ixtiyoriy x uchun $f(x-T) = f(x+T)$ tenglik bajarilsa, u holda $y=f(x)$ *davriy* funksiya deyiladi. $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\mathrm{tg}x$ funksiyalar davriy funksiyalar.

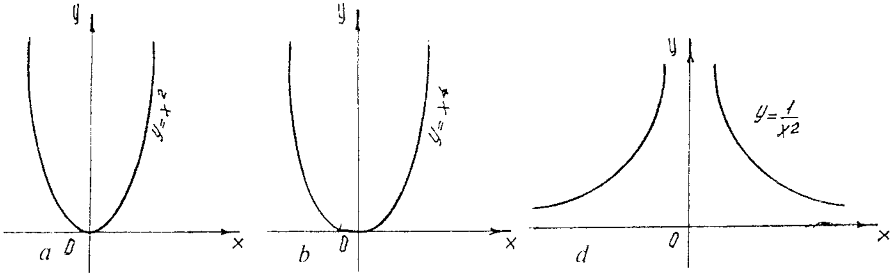
5.1.3. TESKARI FUNKSIYA. SODDA ELEMENTAR FUNKSIYALAR

Bizga $y = f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi A to'plamdan, funksiyaning qiymatlar to'plami B to'plamdan iborat bo'lsin. Agar $f(x)$ funksiya o'suvchi bo'lsa, A to'plamidan olingan x_1 va x_2 qiymatlarni qarasak, o'suvchi funksiya ta'rifiga ko'ra $x_1 < x_2$ va $y_1 = f(x_1)$, $y = f(x_2)$ bo'lsa, u vaqtda $y_1 < y_2$ bo'ladi.

Demak, ikkita har xil x_1 va x_2 qiymatlariga funksiyaning ikkita y_1 va y_2 qiymatlari mos keladi. Buning teskarisi ham to'g'ri, ya'ni agar $y_1 < y_2$ va $y_1 = f(x_1)$, $y = f(x_2)$ bo'lsa, o'suvchi funksiya ta'rifidan $x_1 < x_2$ kelib chiqadi. Shunday qilib, x ning qiymatlari bilan y ning ularga mos qiymatlari orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatiladi. y ning bu qiymatlarini argumentning qiymatlari deb, x ning qiymatlarini esa funksiyaning qiymatlari deb qarab x ni y ning funksiyasi sifatida olamiz. $x = \varphi(y)$ funksiya $y = f(x)$ funksiya uchun *teskari funksiya* deyiladi. Shunga o'xshash, kamayuvchi funksiya uchun ham teskari funksiya mavjudligini ko'rsatish mumkin. Agar $x = \varphi(y)$ va $y=f(x)$ funksiyalarning grafiklarini yasasak, bitta chiziqdan iborat bo'ladi. $x = \varphi(y)$ teskari funksiya $y=f(x)$ tenglamani x ga nisbatan yechish yo'li bilan topiladi. Odatda, teskari funksiyaning argumentini x bilan, funksiyani esa y bilan belgilab grafik chizilsa, u holda ikkita har xil grafik hosil bo'ladi. Grafiklar birinchi koordinata burchagining bissektrisasiga nisbatan simmetrik bo'lishini ko'ramiz. Shuning uchun $y = f(x)$ funksiyaga teskari funksiya $x = \varphi(y)$ ko'rinishda belgilanadi.

Sodda elementar funksiyalar deb quyidagi funksiyalarga aytiladi: *darajali funksiya*: $y=x^\alpha$, bunda $\alpha \in \mathrm{R}$, *ko'rsatkichli funksiya*: $y=a^x$, bunda $a \neq 1$ musbat son; *logarifmik funksiya:* $y = \log_a x$, bunda $a \neq 1$ musbat son; *trigonometrik funksiyalar*: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg} x$, $y = \sec x$, $y = \mathrm{cosec} x$, $y = \mathrm{ctg} x$ va *teskari trigonometrik funksiyalar:* $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcsec} x$, $y = \mathrm{arccosec} x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$. Bu asosiy elementar funksiyalar o'rta maktab kursida o'tilgan bo'lsa-da, ularning ustida to'xtalib o'tamiz.

Darajali funksiya: $y = x^\alpha$ (α — haqiqiy son), α — darajali funksiyaning ko'rsatkichi. Umuman darajali funksiyaning aniqlanish sohasi α ning qiymatlariga qarab turli bo'ladi. α irratsional son bo'lganda funksiya logarifmlash va potensirlash yo'li bilan hisoblanadi. Bunda $x > 0$ deb olamiz. $x>0$ da $\alpha=0$ bo'lsa, $x^\alpha = 1$ bo'ladi. $\alpha \neq 0$ bo'lsa, darajali funksiyaning qiymatlar to'plami haqiqiy son $(0; +\infty)$ intervaldan iborat bo'ladi. 80, 81-chizmalarda darajali funksiyaning $\alpha > 1, \alpha = 1$ va $\alpha < 0$ qiymatlaridagi tasvirlari berilgan. 80-chizmadan ko'rinadiki, darajali funksiya musbat ko'rsatkichlarda o'suvchi, manfiy ko'rsatkichlarda kamayuvchidir. Shuning bilan birga darajali funksiya α ning qiymatlariga qarab aniqlanish sohalari har xil bo'lishini eslatish kerak:



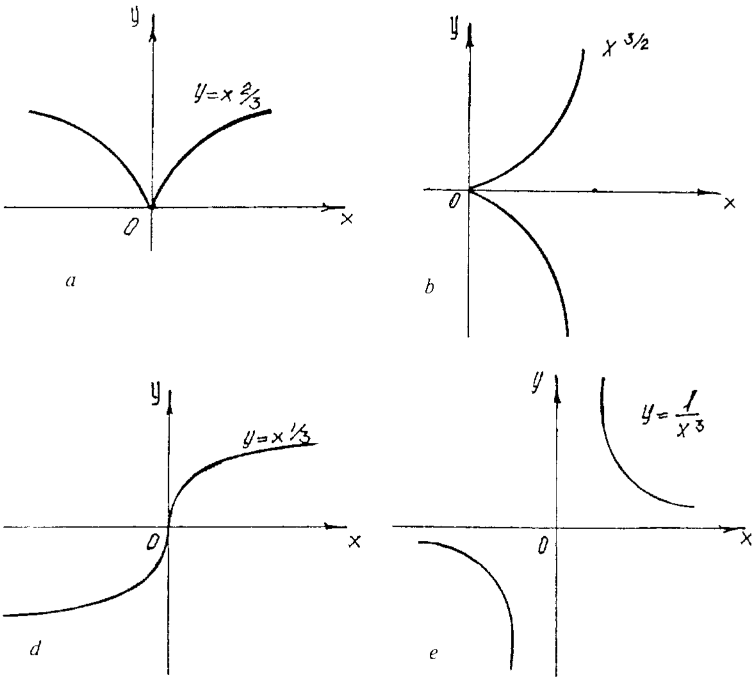
80-chizma.

a) α — butun musbat son bo'lsa, funksiya $(-\infty;\ +\infty)$ intervalda aniqlangan;

b) α — butun manfiy son bo'lsa, funksiya x ning $x=0$ dan boshqa hamma qiymatlarida aniqlangan.

80-*a*, *b* chizmalarda α ning butun musbat son qiymatlarida grafiklar tasvirlangan.

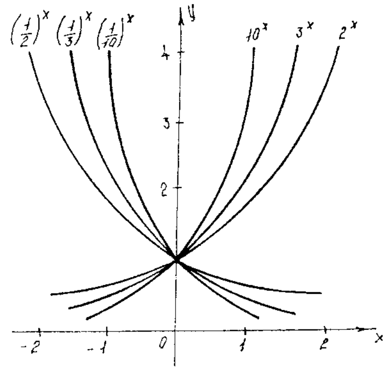
80-*d* chizmada α ning butun manfiy son qiymatlari uchun grafiklar tasvirlangan.



81-chizma.

81-*a*, *b*, *d*, *e* chizmalarda α ning ratsional kasr qiymatlari uchun grafiklar tasvirlangan.

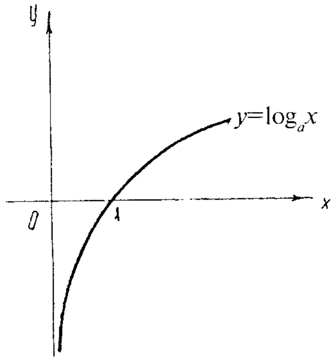
Ko'rsatkichli funksiya: $y = a^x$, $a > 0$ va $a \neq 1$. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi barcha haqiqiy sonlar to'plami R dan iborat. Bu funksiya $a > 1$ da o'suvchi, $0 < a < 1$ da kamayuvchi. Ikkala holda funksiya chegaralanmagan (82-chizma).



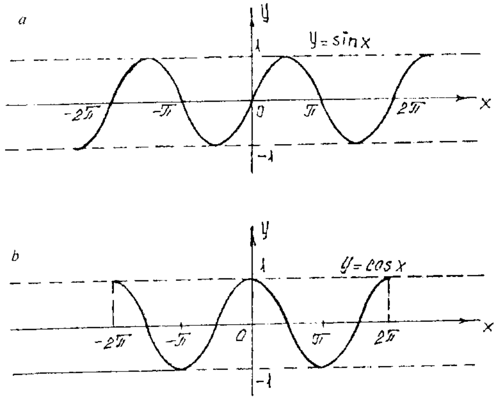
82-chizma.

Logarifmik funksiya: $y = \log_a x$, $a > 0$ va $a \neq 1$. Bu funksiya musbat sonlar to'plami, ya'ni R da aniqlangan. Bu funksiyaning qiymatlar to'plami esa haqiqiy sonlar to'plamidan iborat. Ko'rsatkichli va logarifmik funksiyalar o'zaro teskari funksiyalar bo'lgani uchun ularning grafiklari $y = x$ to'g'ri chizig'iga nisbatan simmetrik joylashgan (83-chizma).

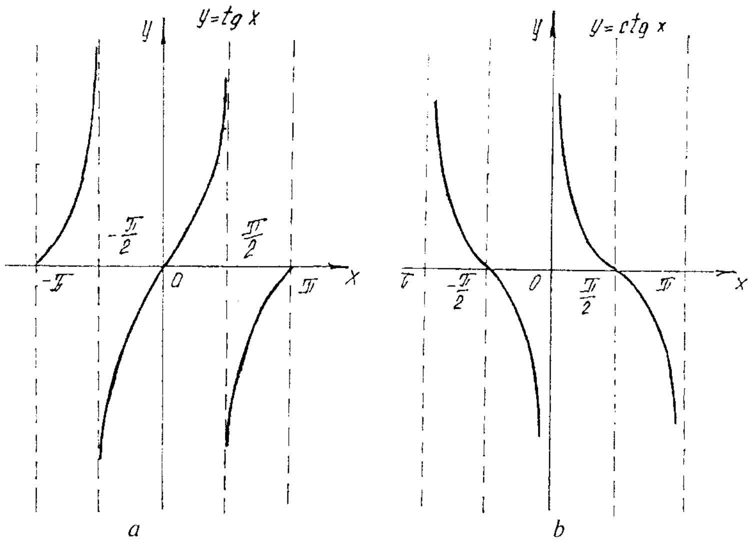
Trigonometrik funksiyalar. Trigonometrik funksiyalar barchasi davriydir. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x \in$ R funksiyalari davri 2π ga teng. $\sin x$ funksiyasi toq, $\cos x$ funksiyasi juft. Bu funksiyalar x ning barcha qiymatlarida aniqlangan. Bu funksiyalarning grafiklari chegaralangan bo'lgani uchun $-1 \leq y \leq 1$ polasada joylashadi (84-chizma). $y = \mathrm{tg}x$; $x \in$ R, $x \neq \pm\pi/2 + \pi k$, $k \in Z$; $y = \mathrm{ctg}\, x$; $x \in$ R, $x \neq \pi k$, $k \in Z$.



83-chizma.

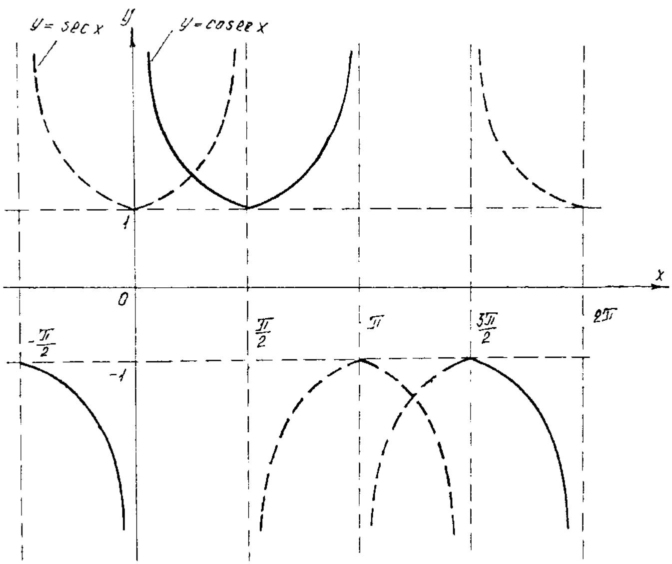


84-chizma.



85-chizma.

Tangens va kotangens funksiyalari toq, chegaralanmagan, davriy bo'lib, davri π ga teng (85-chizma); y = sec$x$ funksiya $x \in$ R, $x \neq \pm\pi/2+\pi k$, $k \in Z$, y = cosec$x$, $x \in$ R, $x \neq \pi k$, $k \in Z$ (86-chizma).



86-chizma.

5.1.4. MURAKKAB FUNKSIYALAR. KO'PHADLAR. RATSIONAL FUNKSIYALAR. ALGEBRAIK VA TRANSSENDENT FUNKSIYALAR

Murakkab funksiyalar. Bizga ikkita: $y = F(u)$ va $u = \varphi(x)$ funksiyalar berilgan bo'lsin. Boshqacha aytganda, y u ning funksiyasi bo'lib, u esa o'z navbatida x o'zgaruvchiga bog'liq bo'lsa, y ham x ga bog'liq bo'ladi, ya'ni $y = F[\varphi(x)]$ funksiyani hosil qilamiz. Bu funksiya *murakkab* funksiya deyiladi.

$y = F[\varphi(x)]$ funksiyaning aniqlanish sohasi $u = \varphi(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi yoki u ning $F(u)$ funksiya aniqlanish sohasidan tashqari chiqmaydigan qiymatlarida aniqlanadigan qismi bo'ladi:

M i s o l. $u = 1 - x^2$, $y = \sqrt{u}$ bo'lsin, u holda murakkab funksiya, $y = \sqrt{1 - x^2}$ bo'ladi. Bu funksiyani aniqlanish sohasi $[-1;\ 1]$ kesmadan iborat.

Ko'phadlar. $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, $x \in R$, $a_0 \neq 0$ ko'rinishidagi funksiya n-darajali ko'phad yoki butun ratsional funksiya deyiladi. Bu yerda a_0, a_1, a_2, ... $a_{n\ldots}$ koeffitsiyentlar deb ataladigan o'zgarmas sonlar, $n \in N$; n — ko'phadning darajasi deyiladi. Ko'phadlar lotin alfavitining bosh harflari P, R, Q... bilan belgilanib, uning pastida indeks bilan ko'phadning darajasi ko'rsatiladi.

Masalan, uchinchi darajali ko'phad: $P_3(x) = a_0x^3 + 5x$; birinchi darajali ko'phad: $P_1(x) = a_0x + a$. Ikkinchi darajali ko'phad esa kvadrat uchhad deb ataladi: $P_2(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$. Ko'phadlar chegaralanmagan, davriymas funksiyalar bo'ladi. Ayrim ko'phadlargina toq va monoton funksiyalar bo'lishi mumkin.

Ratsional kasrlar. Bu funksiya ikkita ko'phadning nisbati kabi aniqlanadi:

$$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}.$$

Bu funksiyaning aniqlanish sohasi sonlar o'qining kasr maxrajini nolga aylantiradigan nuqtalaridan boshqa barcha nuqtalar to'plamidan iborat. Agar ratsional kasrning suratidagi ko'phadning ko'rsatkichi maxrajidagi ko'phadning ko'rsatkichidan kichik bo'lsa, to'g'ri ratsional kasr, aks holda noto'g'ri ratsional kasr deyiladi. Noto'g'ri ratsional kasrni to'g'ri ratsional kasr bilan ko'phadning yig'indisi shaklida ifodalash mumkin.

Masalan, $y = \frac{x^3 + 2x^2 + 3}{x+1}$ kasrning suratini maxrajiga bo'lib, $y = \frac{x^3 + 2x^2 + 3}{x+1} = x^2 + x - 1 + \frac{4}{x+1}$ ga ega bo'lamiz.

Algebraik funksiyalar. Transsendent funksiyalar

1-ta'rif. Funksiyani aniqlovchi formuladagi argument x ustida faqat algebraik amallar (qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish, darajaga ko'tarish) bajarilgan bo'lsa, u funksiyaga *algebraik* funksiya deyiladi. Algebraik funksiyaga ko'phadlar va ratsional kasrlar misol bo'ladi.

2-ta'rif. Algebraik funksiyada ildiz chiqarish amali ham qatnashsa u *irratsional* funksiya deyiladi.

Masalan, $y = \dfrac{3x^5 + \sqrt{x^3}}{2\sqrt[5]{x^2} + 3x}$.

3-ta'rif. Algebraik bo'lmagan boshqa barcha funksiyalar *transsendent* funksiyalar deyiladi. Masalan, 10^x , $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$ va h.k.

Elementar funksiyalar

Ta'rif. *Elementar* funksiya deb $y = f(x)$ ko'rinishidagi birgina formula bilan berilishi mumkin bo'lgan funksiyaga aytiladiki, bunda o'ng tomonda turuvchi ifoda chekli sonda qo'shish, ayirish ko'paytirish, bo'lish va murakkab funksiya elementlari yordamida asosiy elementar funksiyalardan va o'zgarmaslardan tuzilgan, masalan,

$y = x^3 + 5\sin 4x$; $y = 5^{\cos x}$; $x \in R$;
$y = \log_3(\cos x)$; $y = \cos(5^x)$; $x \in R$.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Sonli funksiya deganda qanday funksiyani tushunasiz?
2. Funksiya nima?
3. Funksiyaning juft-toqligi, davriyligi qanday aniqlanadi?
4. Funksiyaning o'suvchi, kamayuvchiligi, chegaralanganligi, monotonligi qanday aniqlanadi?
5. Sodda elementar funksiyalarga qaysi funksiyalar kiradi?
6. Ko'phad deb nimaga aytiladi?
7. To'g'ri va noto'g'ri ratsional kasrlarni ta'riflang.
8. Algebraik va transsendent funksiyalar deganda qanday funksiyalarni tushunasiz?

5.2. KETMA-KETLIKLAR. KETMA-KETLIKNING LIMITI. CHEKSIZ KICHIK VA CHEKSIZ KATTA SONLI KETMA-KETLIKLAR

5.2.1. SONLI KETMA-KETLIKLAR. CHEGARALANGAN KETMA-KETLIKLAR

1-ta'rif. Natural sonlar to'plami N da aniqlangan $\alpha = f(n)$ funksiya *sonli ketma-ketlik* deyiladi.

Sonli ketma-ketlik $\{x\}$ yoki $\{f(n)\}$, $n \in$ N ko'rinishda belgilanadi. Agar n ga 1, 2, 3... va h.k qiymatlar bersak, funksiyaning xususiy qiymatlarini olamiz:

$$x_1 = f(1),\ x_2 = f(2),\ \ldots,\ x_n = f(n).$$

Bu qiymatlarga sonli ketma-ketlikning *hadlari* yoki *elementlari* deyiladi. Ketma-ketlikning n-hadi uning *umumiy hadi* deb ataladi. Umumiy had ma'lum bo'lsa, ketma-ketlik berilgan hisoblanadi.

1-m i s o l. $x_n = 6^n$, $n \in$ N funksiya quyidagi sonlar ketma-ketligini beradi:

$$\{x_n\} = \{6^n\} = \{6,\ 36,\ 216,\ \ldots,\ 6^n,\ \ldots\}\ .$$

2-m i s o l. $x = \frac{1+(-1)^n}{2}$, $n \in$ N funksiya quyidagi sonli ketma-ketlikni beradi:

$$\{x_n\} = \left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\} = \{0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \ldots\}.$$

Misollardan ko'rinadiki, barcha ketma-ketliklar cheksiz ketma-ketliklar bo'lib, ularning har birida so'nggi had mavjud emas.

Barcha hadlari bir xil qiymat qabul qiladigan $\{x_n\}$ ketma-ketlik *o'zgarmas ketma-ketlik* deb ataladi.

Agar ketma-ketlikning n-hadi, ya'ni umumiy hadi ma'lum bo'lsa, uning hadlarini hisoblash mumkin.

3-m i s o l. $x_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ berilgan. Bu ketma-ketlikning birinchi 6 ta hadini hisoblang.

Y e c h i s h. $x_1 = \frac{(-1)^1}{1^2} = -1;\quad x_2 = \frac{(-1)^2}{2^2} = \frac{1}{4};\quad x_3 = \frac{(-1)^3}{3^2} = -\frac{1}{9};$

$x_4 = \frac{(-1)^4}{4^2} = \frac{1}{16};\quad x_5 = \frac{(-1)^5}{5^2} = -\frac{1}{25};\quad x_6 = \frac{(-1)^6}{6^2} = \frac{1}{36}.$

Ketma-ketlik berilishining rekurrent usuli ham mavjud. Bu usulda ketma-ketlikning umumiy hadini, oldingi hadlardan foydalanib hisoblash qoidasi beriladi. Ketma-ketlikning umumiy hadini oldingi hadlari orqali hisoblash formulasi rekurrent munosabat deyiladi. Rekurrent munosabatga misol qilib quyidagi formulani ko'rsatish mumkin:

$$x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}.$$

Bu formula $n=1$ va $n=2$ qiymatlarda ma'noga ega emas, chunki bu qiymatlarda x_0, x_{-1} hadlar hosil bo'ladi, ketma-ketlikda esa 0, -1 nomerli hadlar yo'q. Shuning uchun berilgan ketma-ketlikda x_1 va x_2 hadlarni boshlang'ich hadlar deymiz. Shularga asosan, keyingi hadlarni x_3 dan boshlab topamiz. Aytaylik, $x_1= 0$, $x_2=1$ bo'lsin, u holda

$x_3 = x_2 + 2x_1=1$, $\quad$ $x_4 = x_3 + 2x_2=1 + 2=3$;
$x_5 = x_4 + 2x_3=3+2=5$, $\quad$ $x_6 = x_5 + 2x_4= 5 + 6 = 11$ ...;

Shunday qilib, 1, 3, 5, 11, ... ko'rinishdagi ketma-ketlikka ega bo'ldik.

2-ta'rif. Shunday musbat M soni mavjud bo'lib, barcha $n \in \mathrm{N}$ uchun $|x_n| < M$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ket *chegaralangan* deyiladi. Aks holda *chegaralanmagan* deyiladi.

4-m i s o l. $x_n = \frac{1}{n^3}$ ketma-ketlik chegaralangan, chunki $0<\left|\frac{1}{n^3}\right|<1$.

3-ta'rif. Agar istalgan $n \in \mathrm{N}$ uchun $x_n \le x_{n+1}$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik *o'suvchi* deyiladi. Agar $x_n< x_{n+1}$ tengsizlik bajarilsa $\{x_n\}$ ketma-ketlik *qat'iy o'suvchi* ketma-ketlik deyiladi.

5-m i s o l. $x_n = \frac{2n-1}{n}$, $n \in \mathrm{N}$ kamaymaydigan, chunki

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2n+1}{n+1} - \frac{2n-1}{n} = \frac{1}{n(n-1)} > 0 .$$

4-ta'rif. Agar istalgan $n \in \mathrm{N}$ uchun $x_n \ge x_{n+1}$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik *kamayuvchi* deyiladi. Agar $x_n > x_{n+1}$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik *qat'iy kamayuvchi* ketma-ketlik deyiladi.

6-m i s o l. $x_n = \frac{1}{n^5}$ ketma-ketlik o'smaydigan, chunki

$$\frac{1}{(n+1)^5} < \frac{1}{n^5} .$$

5.2.2. KETMA-KETLIKNING LIMITI

Sonli ketma-ketliklar limiti, yaqinlashuvchi va uzoqlashuvchi sonli ketma-ketliklar. Ushbu

$$\{x_n\} = \left\{1 - \frac{1}{n}\right\}, \quad n \in \mathrm{N}, \tag{1}$$

$$\{x_n\} = \left\{1 + \frac{1}{n}\right\}, \quad n \in \mathrm{N} \tag{2}$$

ketma-ketliklarni qaraylik. Bunda (1) ketma-ketlik n ning o'sib borishi bilan o'suvchi bo'lib, (2) ketma-ketlik esa n ning o'sib borishi bilan kamayuvchi ketma-ketlik bo'lib, 1 ga yaqinlashadi. Buni matematik nuqtayi nazaridan ta'riflash uchun quyidagi savolga javob izlaymiz. n ning qiymati qanday bo'lganda $x_n - 1$ ayirmaning absolut qiymati 0,001 dan kichik bo'ladi?

$|x_n - 1| = \frac{1}{n}$ bo'lganidan $|x_n - 1| < 0{,}001$ tengsizlik ixtiyoriy $n > N = 1000$ da bajariladi.

U holda ixtiyoriy musbat ε soni uchun (3) tengsizlik ixtiyoriy $n > N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ uchun bajariladi.

Mana shunday bo'lganda (1) va (2) ko'rinishidagi ketma-ketliklarning limiti 1 ga teng deyiladi va bu quyidagicha yoziladi:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Endi ketma-ketlik limitiga ta'rif beramiz. a o'zgarmas son va $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $N = N(\varepsilon)$ son mavjud bo'lsaki, barcha $n \geq N$ lar uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, a o'zgarmas son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning *limiti* deyiladi va bu quyidagicha yoziladi:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Yuqoridagi misollardan ko'rinadiki, N natural sonini tanlanishi oldindan berilgan musbat ε soniga bog'liq. Bu bog'lanish $N = N(\varepsilon)$ yoki $N = N\varepsilon$ ko'rinishida yoziladi. Agar ketma-ketlik limitga ega bo'lsa, u *yaqinlashuvchi*, limitga ega bo'lmasa, *uzoqlashuvchi* deyiladi.

5.2.3. CHEKSIZ KICHIK VA CHEKSIZ KATTA SONLI KETMA-KETLIKLAR

Ta'rif. Agar ixtiyoriy musbat A soni uchun (A ni qancha katta qilib tanlamaylik), shunday N nomer mavjud bo'lib, $n > N$ qiymatlarida $|x_n| > A$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik *cheksiz katta* deyiladi.

Masalan, $\{n^2\}$ ketma-ketlik cheksiz katta. Shuning bilan birga chegaralanmagan ketma-ketlik cheksiz katta ketma-ketlik bo'lmasligi ham mumkin. Masalan, 1, 2, 1, 3, 1, 4, ..., 1, n, ..., 1, n+1... ketma-ketlik cheksiz katta emas, chunki $A > 1$ qiymatida $|x_n|>A$ tengsizlik n ning toq qiymatlarida ma'noga ega emas.

Ta'rif. Agar ixtiyoriy musbat ε soni uchun (ε yetarlicha qilib tanlanganda ham) shunday N nomer mavjud bo'lib, $n > N$ qiymatlarida $|x_n|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik *cheksiz kichik* ketma-ketlik deyiladi.

Masalan, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik berilgan, $|x_n|=\left|\frac{1}{n}\right|<\varepsilon$ tengsizlikdan $n>\frac{1}{\varepsilon}$ ga ega bo'lamiz. Agar $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $n > N$ uchun $|x_n|< \varepsilon$ bajariladi ($\varepsilon=\frac{1}{10}$ uchun N=[10]=10 ni olamiz).

Cheksiz katta va cheksiz kichik ketma-ketliklar orasidagi bog'lanishni quyidagi teorema aniqlab beradi.

Teorema. *Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning barcha hadlari noldan farqli bo'lib, ya'ni x_n cheksiz katta ketma-ketlik bo'lsa, $(\alpha_n)=\left(\frac{1}{x_n}\right)$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi va aksincha.*

Cheksiz kichik ketma-ketliklar quyidagi xossalarga ega:

1) ikkita cheksiz kichik ketma-ketliklar yig'indisi va ayirmasi cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi:

$$|\alpha_n \pm \beta_n| < \varepsilon;$$

2) ikkita cheksiz kichik ketma-ketliklar ko'paytmasi cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi:

$$|\alpha_n \cdot \beta_n| < \varepsilon;$$

3) cheklangan ketma-ketlikning cheksiz kichikka ko'paytmasi yana cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi:

$$|x_n \cdot \beta_n| < \varepsilon.$$

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lib, uning limiti a ga teng bo'lsa, u holda $|x_n - a| = \{x_n\}$ ayirma cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi, chunki ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N nomer topiladiki, $|x_n| = |x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bundan esa yaqinlashuvchi ketma-ketlik biror a limitga ega bo'lsa, uning ixtiyoriy elementini $x_n = a + \alpha_n$ ko'rinishida yozish mumkin, degan natijaga kelamiz.

5.2.4. YAQINLASHUVCHI SONLI KETMA-KETLIKLAR LIMITLARINING ARIFMETIK XOSSALARI

Yaqinlashuvchi sonli ketma-ketliklarning limitlarini hisoblashda yig'indi, ayirma, ko'paytma va bo'linmaning limitlari to'g'risidagi teoremalardan foydalanishga to'g'ri keladi (bu teoremalar arifmetik xossalar deb ham yuritiladi).

1-teorema. *Agar $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lsa, ularning yig'indisi bo'lgan $\{a_n + b_n\}$ ketma-ketlik ham yaqinlashadi va yig'indining limiti qo'shiluvchilarning limitlari yig'indisiga teng bo'ladi:*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

I s b o t. Aytaylik, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ bo'lsin. U holda $a_n = a + \alpha_n$, $b_n = b + \beta_n$ deb yozamiz. Bu yerda α_n va β_n lar $n \to \infty$ da nolga intiladi. $a_n + b_n = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n)$;

$n \to \infty$ da $\alpha_n \to 0$, $\beta_n \to 0$ ga intiladi.

Bundan $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = (a + b) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$.

2-teorema. *Agar $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lsa, ularning ko'paytmasi ham yaqinlashadi va ko'paytmaning limiti ko'payuvchilar limitlari ko'paytmasiga teng bo'ladi:*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n).$$

1-natija. *O'zgarmas ko'paytuvchini limit belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.*

2-natija. *Agar $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lsa, ularning ayirmasi $\{a_n - b_n\}$ ham yaqinlashadi va ayirmaning limiti limitlar ayirmasiga teng bo'ladi:*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n.$$

3-teorema. *Agar $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lsa va $b_n \neq 0$ bo'lsa, ularning bo'linmasi $\{a_n/b_n\}$ ketma-ketlik ham yaqinlashadi va uning limiti limitlar bo'linmasiga teng bo'ladi:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

M i s o l. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7-5n}{3-4n} = \frac{5}{4}$.

5.2.5. MONOTON KETMA-KETLIK TA'RIFI

Ketma-ketlik $\{x_n\}$: agar $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots x_n < x_{n+1} < \ldots$ bo'lsa *o'suvchi*, agar $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots x_n \leq x_{n+1} \leq \ldots$ bo'lsa, kamaymaydigan, agar $x_1 > x_2 > x_3 > \ldots x_n > x_{n+1} > \ldots$ bo'lsa, *kamayuvchi,* agar $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq$ $\geq \ldots x_n \geq x_{n+1} \geq \ldots$ bo'lsa, *o'smaydigan* deyiladi.

Bu ketma-ketliklarni barchasi birlashtirilib, *monoton* deyiladi. O'suvchi va kamayuvchi ketma-ketliklar qat'iy monoton deyiladi.

M i s o l l a r

1) 1, 2, 3, ..., n, ... o'suvchi va chegaralanmagan;

2) 1,1, 2,2, 3,3, ..., n,n,.. kamaymaydigan va chegaralanmagan.

Berilgan ketma-ketlikni monotonlikka tekshirishda $x_{n+1} > x_n$ ning ishorasi yoki $x_n + 1/x_n$ nisbat 1 ga taqqoslanadi.

1-m i s o l. $x_n = \frac{n}{2n+1}$ umumiy hadga ega bo'lgan ketma-ketlik monoton o'suvchi ekanligini isbotlang.

Y e c h i s h. Ixtiyoriy n uchun $x_{n+1} > x_n$ ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun n ni $n+1$ ga almashtiramiz:

$x_{n+1} = \frac{n+1}{2n+3}$; taqqoslash uchun bitta umumiy maxrajga keltiramiz:

$$x_{n+1} = \frac{2n^2+3n+1}{(2n+3)(2n+1)} \qquad x_n = \frac{2n^2+3n}{(2n+3)(2n+1)};$$

$2n^2 + 3n + 1 > 2n^2 + 3n$ bo'lgani uchun: $x_{n+1} > x_n$.

2-m i s o l. Umumiy hadi $x_n = n/5^n$ ga teng bo'lgan ketma-ketlik monoton kamayuvchi ekanligini ko'rsating.

Y e c h i s h. n uchun $x_n > x_{n+1}$ ni kuzatish kerak, quyidagi nisbatni olamiz:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{n+1}{5^{n+1}}:\frac{n}{5^n}=\frac{(n+1)\cdot 5^n}{5^{n+1}\cdot n}=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1+\frac{1}{n}}{5}\le\frac{2}{5}<1.$$

Monoton ketma-ketliklar hech bo'lmaganda bir tomondan chegaralangan bo'lishini eslatish kifoya.

Teorema. *Monoton chegaralangan ketma-ketlik limitga ega.*

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Sonli ketma-ketliklar deb nimaga aytiladi?
2. Ketma-ketliklarning berilish usullarini ayting va misollar keltiring.
3. Qanday ketma-ketliklar yuqoridan (quyidan) chegaralangan deb ataladi? Misollar keltiring.
4. Qanday ketma-ketliklar monoton o'suvchi (kamayuvchi, o'smaydigan, kamaymaydigan) deb ataladi?
5. Ketma-ketliklarning limiti ta'rifini aytib bering. Yaqinlashuvchi ketma-ketlikka misol keltiring.
6. Yaqinlashuvchi sonli ketma-ketliklarning limitlari haqidagi teoremalarni aytib, isbotlab bering.

5.3. FUNKSIYANING LIMITI. LIMITLAR HAQIDAGI TEOREMALAR. AJOYIB LIMITLAR

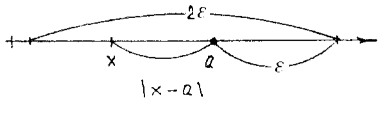
5.3.1. O'ZGARUVCHI MIQDORNING LIMITI. CHEKSIZ KATTA O'ZGARUVCHI MIQDOR

Biz «o'zgaruvchi miqdor limitga intiladi» atamasi bilan aniqlanadigan, tartiblangan o'zgaruvchi miqdorlarni tekshiramiz. Bundan keyin o'zgaruvchan miqdorni o'zgaruvchi x deb tushunamiz.

1-ta'rif. Agar har bir oldindan berilgan kichik $\varepsilon > 0$ son uchun x ning shunday qiymatini topish mumkin bo'lsaki, x ning keyingi qiymatlarida $|x-a| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, o'zgarmas «a» son o'zgaruvchi x ning *limiti* (oxirgi marrasi) deyiladi. («lim» — qisqartirilgani, lotincha *Limes* so'zidan olingan bo'lib, marra (chek) degan so'zdir).

Agar a son o'zgaruvchi x ning limiti bo'lsa, u holda x o'zgaruvchi a ga intiladi deyiladi va $\lim x = a$ ko'rinishda yoziladi.

Geometrik nuqtayi nazardan limit ta'rifini quyidagicha ifodalash mumkin: markazi a nuqtada va radiusi ε bo'lgan oldindan berilgan ixtiyoriy har qancha kichik atrof uchun x ning shunday qiymati



87-chizma.

topilsaki, o'zgaruvchining keyingi qiymatlariga tegishli barcha nuqtalar shu atrofda bo'lsa, o'zgarmas a son o'zgaruvchi x ning limiti bo'ladi (87-chizma).

M i s o l. O'zgaruvchi miqdor x ketma-ket quyidagi qiymatlarni qabul qiladi:

$$x_1 = 3+\frac{1}{2},\ x_2 = 3+\frac{1}{2^2},\ x_3 = 3+\frac{1}{2^3},\dots,\ x_n = 3+\frac{1}{2^n}.$$

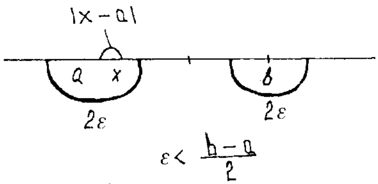
Bu o'zgaruvchi miqdorning limiti 3 ga tengligini isbotlaymiz. Quyidagi tenglikni yozamiz:

$$|x_n - 3| = \left|\left(3+\frac{1}{2^n}\right)-3\right| = \frac{1}{2^n}.$$

Har qanday ε uchun o'zgaruvchining n nomeridan boshlanadigan barcha keyingi qiymatlari (bu yerda $\frac{1}{2^n}<\varepsilon$ yoki $n>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$) $|x_n - 3|<\varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantiradi. Bu esa talab qilingan isbotdir, ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{2^n}\right)=3$.

O'zgarmas miqdorning limiti shu o'zgarmas miqdorning o'ziga teng, chunki har qanday bo'lganda ham $|x-c| = |c-c| = 0<\varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Limitning ta'rifidan o'zgaruvchi x ikkita limitga ega bo'la olmasligi kelib chiqadi. Haqiqatan ham, agar $\lim x = a$, $\lim x = b (a < b)$ bo'lsa, u holda ε ixtiyoriy kichik bo'lgan holda x birdaniga ushbu ikkita tengsizlikni qanoatlantirishi lozim: $|x-a| < \varepsilon$ va $|x-b| <\varepsilon$, bu esa $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$ bo'lgan holda bo'lishi mumkin, bu esa mumkin emas (88-chizma).

2-ta'rif. Agar oldindan berilgan har bir $M > 0$ son uchun x ning shunday qiymatini topish mumkin bo'lsaki, o'zgaruvchining shu qiymatidan boshlab, barcha keyingi qiymatlari uchun $|x| > M$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, o'zgaruvchi x *cheksizlikka intiladi* deyiladi.



88-chizma.

Agar o'zgaruvchi x cheksizlikga intilsa, u *cheksiz katta* o'zgaruvchi miqdor deyiladi va $x \to \infty$ ko'rinishida yoziladi.

M i s o l. O'zgaruvchi miqdor x

$$x_1 = -1;\ x_2 = 4;\ x_3 = -9;\ x_4 = 16,\ \ldots,\ x_n = (-1)^n n^2,\ \ldots$$

qiymatlarni qabul qilsin. Bu cheksiz katta o'zgaruvchi miqdor, chunki ixtiyoriy $M > 0$ da o'zgaruvchining biror qiymatidan boshlab, hamma keyingi qiymatlari absolut miqdor bo'yicha M dan katta bo'ladi.

Agar ixtiyoriy $M > 0$ da o'zgaruvchining biror qiymatidan boshlab, barcha keyingi qiymatlari $M < 0$ tengsizlikni qanoatlantirsa, o'zgaruvchi miqdor x «plus cheksizlikka intiladi» deyiladi va $x \to +\infty$ ko'rinishda yoziladi ($x \to -\infty$ ta'rifi ham xuddi shunga o'xshash).

5.3.2. FUNKSIYANING NUQTADAGI LIMITI

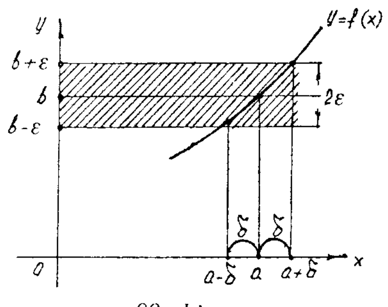
Endi x argument biror a limitga yoki cheksizlikka intilganda funksiya o'zgarishini qaraymiz.

1-ta'rif. Agar, $y = f(x)$ funksiya a nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lib ($x = a$ nuqtaning o'zida aniqlanmagan bo'lishi mumkin) ixtiyoriy musbat ε son uchun shunday musbat b sonni ko'rsatish mumkin bo'lsaki, x ning a dan farqli va $|x-a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha $x \neq a$ nuqtalar uchun $|f(x)-b| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, x argument a ga intilganda ($x \to a$), $y = f(x)$ funksiya b limitga intiladi ($y \to b$) va b son funksiyaning $x = a$ nuqtadagi *limiti* deyiladi.

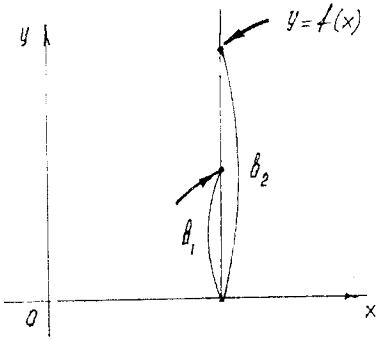
Agar b son funksiyaning a nuqtadagi limiti bo'lsa, bu quyidagicha yoziladi: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ yoki $x \to a$ da $f(x) \to b$. Agar $x \to a$ da $f(x) \to b$ bo'lsa, u holda $y = f(x)$ funksiyaning grafigida bu quyidagicha tasvirlanadi (89-chizma). $|x-a| < \delta$ tengsizlikdan $|f(x)-b| < \varepsilon$ tengsizlik chiqar ekan, u holda bu, a nuqtadan δ yiroq bo'lgan masofada turuvchi barcha x nuqtalar uchun $y = f(x)$ funksiya grafigining M nuqtalari $y = b-\varepsilon$ va $y = b+\varepsilon$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan, eni 2ε bo'lgan yo'l (polosa) ichida yotadi.

1-eslatma. Agar x biror a sondan kichik qiymatlarnigina qabul qilib, shu a songa intilganda $f(x)$ funksiya b_1 limitga intilsa, u holda $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b_1$ kabi yoziladi va b_1 ga $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi *chap limiti* deyiladi.

Agar x funksiya a dan katta qiymatlarnigina qabul qilib shu a songa intilganda $f(x)$ funksiya b_2 songa intilsa,



89-chizma.



90-chizma.

u holda $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b_2$ deb yoziladi va b_2 funksiyaning a nuqtadagi *o'ng limiti* deyiladi.

Agar o'ng va chap limitlar mavjud bo'lib $b_1=b_2=b$ bo'lsa, u holda limitning ta'rifiga ko'ra a nuqtada limitning o'zi bo'ladi (90-chizma).

M i s o l. $\lim\limits_{x\to 3}(3x+1)=10$ ekanini isbotlaymiz. Haqiqatan, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ berilgan bo'lsin; ushbu $|(3x+1)-10|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilishi uchun quyidagi tengsizliklar bajarilishi zarur:

$$|3x-9|<\varepsilon,\ |(x-3)|<\frac{\varepsilon}{3},\ -\frac{\varepsilon}{3}<x-3<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Shunday qilib, istalgan ε da x ning $|x-3|<\frac{\varepsilon}{3}=\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlari uchun $3x+1$ funksiya qiymatining 10 dan farqi ε dan kichik bo'ladi. Bu esa $x\to 3$ da funksiyaning limiti 10 ga teng demakdir.

2-eslatma. Funksiyaning limiti $x\to a$ da mavjud bo'lishi uchun funksiya $x=a$ nuqtada aniqlangan bo'lishi talab qilinmaydi. Limitni topishda a nuqtaning a dan farqli atrofida funksiyaning qiymatlari qaraladi.

M i s o l. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-2x}=2$ ekanini isbotlaymiz.

Bu yerda funksiya $x = 2$ da aniqlanmagan. Ixtiyoriy ε da δ shunday topiladiki, agar $|x-2|<\delta$ bo'lsa,

$$\left|\frac{x^2-4}{x^2-2x}-2<\varepsilon\right| \qquad (1)$$

tengsizlik bajarilishini isbotlash kerak. Ammo $x\neq 2$ da (1) tengsizlik

$$\left|\frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)}-2\right|=\left|\frac{(x+2)}{x}-2\right|=\frac{x-2}{x}$$

yoki $|x-2|<\varepsilon$ (2) tengsizlikka ekvivalentdir.

Shunday qilib, ixtiyoriy ε da (2) tengsizlik bajarilsa, (1) tengsizlik bajariladi (bunda $\varepsilon=\delta$). Buning o'zi berilgan funksiya $x \to 2$ da 2 soniga teng limitga ega demakdir.

5.3.3. CHEKSIZLIKKA INTILUVCHI FUNKSIYALAR

Endi argument o'zgarganda $y=f(x)$ funksiya cheksizlikka intilgan holni qaraymiz.

1-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya a nuqtaning biror atrofida aniqlangan va istalgan $M>0$ son uchun shunday $\delta(M)$ son topish mumkin bo'lsaki, x ning $|x-a| < \delta$ shartni qanoatlantiradigan barcha $x \neq a$ lar uchun $|f(x)| > M$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $x \to a$ da $f(x)$ funksiya cheksizlikka intiladi, ya'ni $x \to a$ da funksiya cheksiz katta miqdor bo'ladi.

Agar $x \to a$ da $f(x)$ funksiya cheksizlikka intilsa va bunda faqat musbat yoki manfiy qiymatlar qabul qilsa, mos ravishda tubandagicha yoziladi:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

M i s o l. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{1}{1+x} = \infty$ ekanligini isbotlang.

Y e c h i s h. $f(x) = \frac{1}{1+x}$ funksiyani qaraymiz. Ixtiyoriy $M>0$ sonini olamiz. $|f(x)|>M$ ni almashtiramiz. $\left|\frac{1}{1+x}\right| > M$ bo'lsin. Bundan $|x+1| < \frac{1}{M}$ bo'lishi kelib chiqadi. Agar $\delta = \frac{1}{M}$ deb olinsa, $|x+1|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan x lar uchun quyidagi tengsizlik bajariladi:

$$\left|\frac{1}{1+x}\right| > \frac{1}{\delta} = M \text{ yoki } \left|\frac{1}{1+x}\right| > M.$$

Bundan esa $x \to -1$ da $f(x) = \frac{1}{1+x} \to \infty$ bo'lishi kelib chiqadi, ya'ni agar $x \to \infty$ da $f(x)$ funksiya cheksizlikka intilsa, u holda bunday yoziladi: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ va jumladan, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ bo'lishi mumkin. Masalan, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ va shunga o'xshash.

Eslatma. $x \to a$ da yoki $x \to \infty$ da $y=f(x)$ funksiya chekli limitga yoki cheksizlikka intilmasligi ham mumkin.

5.3.4. CHEKSIZ KICHIK FUNKSIYALAR

Endi argumentning biror o'zgarishida nolga intiluvchi funksiyalarni tekshiramiz.

Ta'rif. Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ yoki $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ bo'lsa, $x\to a$ da yoki $x\to\infty$ da $f(x)$ funksiya *cheksiz kichik* funksiya deyiladi.

Ta'rifdan ko'rinadiki, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ bo'lsa, bu oldindan berilgan har qanday ixtiyoriy kichik $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ son topiladiki, x ning $|x-a|<\delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlari uchun $|f(x)|<\varepsilon$ sharti o'rinli bo'ladi.

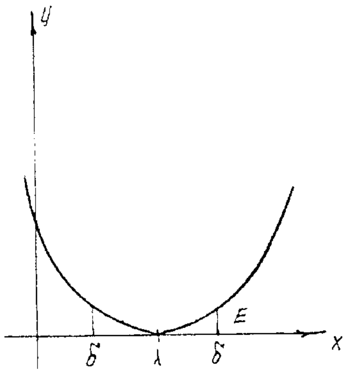
1-misol. $f(x)=(x-1)^2$ funksiya $x\to 1$ da cheksiz kichikdir, chunki $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2=0$ (91-chizma).

2-misol. $\alpha=\frac{1}{x}$ funksiya $x\to\infty$ da cheksiz kichikdir (92-chizma).

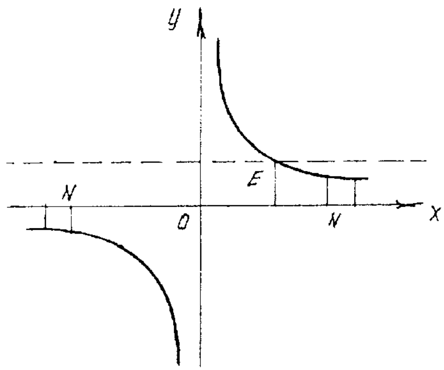
1-teorema. *Agar $y=f(x)$ funksiya o'zgarmas son b bilan cheksiz kichik funksiya $\alpha(x)$ ning yig'indisi $y=b+a(x)$*...(1) *ko'rinishda berilsa, u holda $x\to a$ yoki $x\to\infty$ da* $\lim y = b$ *bo'ladi.*

Aksincha, agar $\lim y=b$ *bo'lsa, $y=b+\alpha(x)$ deb yozish mumkin, bu yerda $\alpha(x)$ cheksiz kichik funksiya.*

Isbot. (1) tenglikdan: $|y-b|=|\alpha(x)|$ kelib chiqadi. Ammo ixtiyoriy ε da, biror qiymatdan boshlab, x ning barcha qiymatlari $|\alpha(x)|<\varepsilon$ munosabatni qanoatlantiradi, demak, biror qiymatdan boshlab, y ning barcha qiymatlari uchun $|y-b|<\varepsilon$ tengsizlik qanoatlantiriladi. Buning o'zi $\lim y=b$ demakdir.



91-chizma.



92-chizma.

M i s o l. $y=1+\frac{1}{x}$ funksiya berilgan bo'lsin, u holda $\lim\limits_{x\to\infty} y=1$ va aksincha, $\lim\limits_{x\to\infty} y=1$ bo'lgani uchun o'zgaruvchi y ning limitini 1 bilan cheksiz kichik funksiyaning yig'indisi, ya'ni $y=1+\alpha(x)$ ko'rinishda yozish mumkin.

2-teorema. *Agar $x\to a$ da (yoki $x\to\infty$* da) $\alpha=\alpha(x)$ *nolga intilsa-yu, lekin nolga aylanmasa, u holda* $y=\frac{1}{\alpha(x)}$ *cheksizlikka intiladi.*

3-teorema. *Ikki, uch va umuman, ma'lum sondagi cheksiz kichik funksiyalarning algebraik yig'indisi cheksiz kichik funksiyadir.*

4-teorema. *Cheksiz kichik $\alpha=\alpha(x)$ funksiyaning cheklangan $z=z(x)$ funksiya bilan ko'paytmasi $x\to a$ (yoki $x\to\infty$) da cheksiz kichik miqdordir.*

5.3.5. LIMITLAR HAQIDA ASOSIY TEOREMALAR

1-teorema. *Chekli sondagi funksiyalar algebraik yig'indisining limiti bu funksiyalar limitlarining algebraik yig'indisiga teng:*

$$\lim(U_1+U_2+\ldots+U_n)=\lim U_1+\lim U_2+\ldots+\lim U_n.$$

I s b o t. Isbotni ikki qo'shiluvchi uchun keltiramiz, qo'shiluvchilar soni har qancha bo'lganda ham teorema o'z kuchida qoladi.

Aytaylik, $\lim U_1=b_1$; $\lim U_2=b_2$ bo'lsin. U holda 4-mavzudagi 1-teoremaga asosan $U_1=b_1+\alpha_1(x)$, $U_2=b_2+\alpha_2(x)$; $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$lar cheksiz kichik miqdorlar. Demak, $U_1+U_2=(b_1+b_2)+(\alpha_1+\alpha_2)$; (b_1+b_2) — o'zgarmas miqdor, $(\alpha_1+\alpha_2)$ esa kichik miqdor.

Shunday qilib,

$$\lim(U_1+U_2)=b_1+b_2=\lim U_1+\lim U_2.$$

M i s o l. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2}{x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}=1+0=1.$

2-teorema. *Chekli sondagi funksiyalar ko'paytmasining limiti bu funksiyalar limitlarining ko'paytmasiga teng:*

$$\lim U_1U_2\ldots U_n=\lim U_1\cdot\lim U_2\cdot\lim U_n,$$
$$\lim U_1=b_1,\ U_2=b_2.$$

I s b o t. $U_1=b_1+\alpha_1$, $U_2=b_2+\alpha_2$ bo'lsin. U hol
$+\alpha_1)(b_2+\alpha_2)=b_1\alpha_1+b_1\alpha_2+b_2\alpha_1+\alpha_1\alpha_2$;
b_1b_2 ko'paytma o'zgarmas miqdor. Demak, $\lim U$,

Natija. *O'zgarmas ko'paytuvchini limit ishorasidan tashqariga chiqarish mumkin*: $\lim cU_1 = c\lim U_1$. Agar $\lim U_1 = b_1$, c — o'zgarmas bo'lsa, $\lim c = c$, $\lim(cb_1) = \lim c \cdot \lim b_1 = c\lim b_1$.

3-teorema. *Ikkita funksiya bo'linmasining limiti, maxraj limiti noldan farqli bo'lsa, bu funksiyalar limitlarining bo'linmasiga teng.*

Agar $\lim V \neq 0$ bo'lsa, $\lim \frac{U}{V} = \frac{\lim U}{\lim V}$.

Isbot. $\lim U = \alpha$, $\lim V = b \neq 0$. Demak, $U = a + \alpha$, $V = b + \beta$, bu yerda α va β cheksiz kichik miqdorlar.

$$\frac{U}{V} = \frac{a+\alpha}{b+\beta} = \frac{a}{b} + \left(\frac{a+\alpha}{b+\beta} - \frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b} + \frac{\alpha b - \beta a}{b(b+\beta)},$$

$$\lim \frac{U}{V} = \frac{a}{b} = \frac{\lim U}{\lim V}.$$

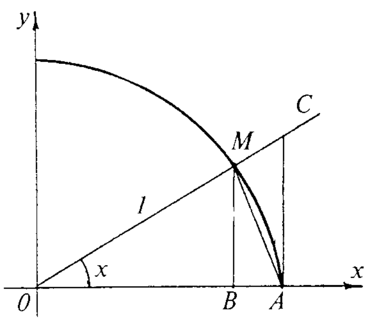
4-teorema (teorema isbotsiz keltiriladi). *Agar uchta $f_1(x)$, $f_2(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalarning qiymatlari orasida $f_1(x) \leq \varphi(x) \leq f_2(x)$ tengsizliklar bajarilsa, bunda $x \to \alpha$ da (yoki $x \to \infty$ da) $f_1(x)$ va $f_2(x)$ birgina b limitga intilsa, u holda $x \to \alpha$ da (yoki $x \to \infty$ da) $\varphi(x)$ ham shu limitga intiladi, ya'ni* $\lim \varphi(x) = b$ *bo'ladi.*

Bu teorema oraliq funksiyaning limiti haqidagi teorema deyiladi.

5.3.6. $x \to 0$ DA $\frac{\sin x}{x}$ FUNKSIYANING LIMITI

Teorema. $\frac{\sin x}{x}$ *funksiya $x \to 0$ da 1 ga teng limitga ega.*

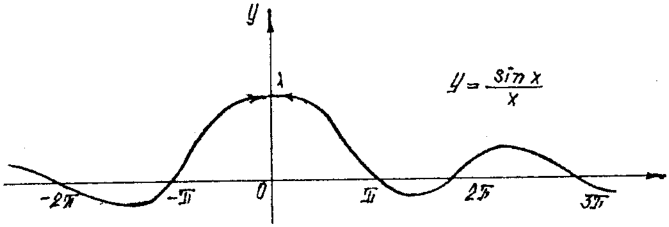
Isbot. $\frac{\sin x}{x}$ funksiya $x = 0$ da aniqlanmagan, chunki kasrning surat va maxraji nolga aylanadi. Bu funksiyaning $x \to 0$ da limitini topamiz. Buning uchun radiusi 1 bo'lgan aylanani qaraymiz (93-chizma). Markaziy burchakni x bilan belgilaymiz, bunda $0 < x < \frac{\pi}{2}$.



93-chizma.

Chizmadan quyidagilarga egamiz:

ΔMOA yuzi $< MOA$ sektor yuzi $< \Delta COA$ yuzi;



94-chizma.

ΔMOA yuzi $S=\frac{1}{2}OA\cdot MB=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin x=\frac{1}{2}\sin x$;

MOA sektor yuzi $S=\frac{1}{2}OA\cdot MA=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot x=\frac{1}{2}x$;

ΔCOA yuzi $S=\frac{1}{2}OA\cdot AC=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \mathrm{tg}x=\frac{1}{2}\mathrm{tg}x.$

Demak, $\sin x < x < \mathrm{tg}\, x$. Hamma hadlarni $\sin x$ ga bo'lamiz: $1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$ yoki $1>\frac{x}{\sin x}>\frac{1}{\cos x}$. Bu tengsizliklarni $x>0$ deb chiqardik.

$\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{\sin x}{x}$; $\cos(-x)=\cos x$ ekanini e'tiborga olsak, $x<0$ bo'lsa ham tengsizlik to'g'ri bo'lib chiqadi.

$\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$, $\lim\limits_{x\to 0}1=1$ ekanligini va oldingi mavzudagi 4-teoremani hisobga olamiz, u holda $\frac{\sin x}{x}$ funksiya shunday ikki funksiya oralig'idaki, ularning ikkalasi ham birgina limitga intiladi va u limit 1 ga teng (94-chizma). Demak,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

M i s o l. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}\frac{1}{\cos x}=3\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=3\frac{1}{1}=3.$

5.3.7. *e* SONI

1-teorema. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *ifoda o'zgaruvchi $n\to\infty$ da 2 bilan 3 orasida yotuvchi limitga ega.*

I s b o t. Nyuton binomi formulasidan foydalanamiz:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \ldots +$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k+1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k}a^{n-k}b^k + \ldots + b^n.$$

Bu formulaga koʻra $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ni yoyamiz:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots + \qquad (1)$$

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot n}\left(\frac{1}{n}\right)^n \ldots$$

(1) tenglikni quyidagicha almashtiramiz:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots$$

$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Oxirgi tenglikdan $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ifoda oʻzgaruvchi n oʻsishi bilan oʻsishi kelib chiqadi. Haqiqatan, n qiymatdan $n+1$ qiymatga oʻtganda, oxirgi yigʻindining har bir qoʻshiluvchisi oʻsadi:

$$\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \text{ va h.k.}$$

Yana bir had qoʻshiladi (Yoyilmaning hamma hadlari musbat).

Endi $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ oʻzgaruvchi cheklanganligini koʻrsatamiz.

$$\left(1-\frac{1}{n}\right) < 1 : \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) < 1\ldots$$

va h.k ekanligini qayd qilib, ushbuni hosil qilamiz:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n};$$

soʻngra $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} < \frac{1}{2^2}$; $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} < \frac{1}{2^3}$;....; $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} < \frac{1}{2^{n-1}}$ ekanligini koʻrsatib, tengsizlikni tubandagicha yozamiz:

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+.....+\frac{1}{2^{n-1}}}$. Bu tengsizlikning o'ng tomonida tagiga chizilgan hadlar maxraji $\frac{1}{2}$ ga va birinchi hadi $a_1=1$ ga teng bo'lgan geometrik progressiyani hosil qiladi, shuning uchun:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+.....+\frac{1}{2^{n-1}}\right]=$$

$$=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=1+\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]<3.$$

Demak, barcha n uchun ushbu tengsizlikni hosil qilamiz;

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3, \qquad (2)$$

(2) dan $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$ kelib chiqadi. Shunday qilib,

$$2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3 \qquad (3)$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ o'suvchi va cheklangan.

Ta'rif. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ning $n \to \infty$ dagi limiti *e soni* deyiladi:

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \qquad (4)$$

e soni irratsional son: $e = 2{,}7182818284...$

2-teorema. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ *funksiya* $x \to \infty$ *da e songa teng limitga ega:*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

I s b o t . Agar x butun musbat qiymatlar qabul qilsa, (4) ga asosan $n \to \infty$ da $\left(1+\frac{1}{n}\right)^x \to e$ ga teng.

Endi x o'zgaruvchi kasr qiymatlar ham, manfiy qiymatlar ham qabul qilgan holda cheksizlikka intilsin.

1) $x \to +\infty$ bo'lsin, y ning har bir qiymati ikkita musbat butun son orasida $n \leq x < n+1$ yotadi. Bu holda quyidagi tengsizliklar bajarilishi o'z-o'zidan ravshan:

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1},$$

$$1+\frac{1}{n} \geq 1+\frac{1}{x} > 1+\frac{1}{n+1},$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}.$$

Agar $x \to +\infty$ bo'lsa, u holda $n \to \infty$. Endi $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ funksiyani o'z ichiga olgan ifodalarning limitlarini topamiz:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e.$$

Demak, oraliq funksiyalarning limiti haqidagi teoremaga asosan:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

2) $x \to -\infty$ deylik. Yangi $x = -(t+1)$ o'zgaruvchini kiritamiz. $x \to -\infty$ da $t \to \infty$ bo'ladi. U holda tubandagicha yozish mumkin:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{1+t}\right)^{-t-1} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-t-1} =$$

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right) = e\cdot 1 = e.$$

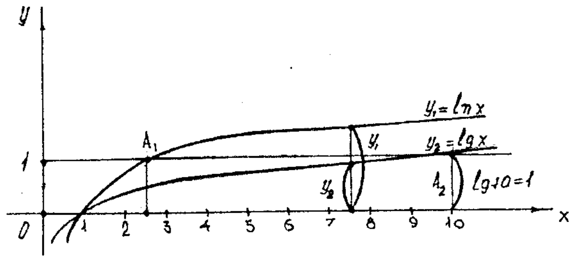
Shunday qilib, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$ ekanligini isbotladik.

M i s o l. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5} = e\cdot 1 = e.$

Izoh. Asosi e bo'lgan ko'rsatkichli $y=e^x$ funksiya matematika kursida juda ko'p qo'llaniladi. Bu funksiyani ko'pincha eksponensial funksiya deb yuritishadi.

5.3.8. NATURAL LOGARIFMLAR

Asosi $e=2{,}718285...$ sondan iborat logarifmlar *natural logarifmlar* deyiladi. U $\ln N$ bilan belgilanadi. Demak, $e^y = x$ bo'lsa, y ga x



95-chizma.

ning natural logarifmi deyiladi va $y=\log_e x$ o'rniga $y = \ln x$ yoziladi (95-chizma).

Endi biror x sonning o'nli va natural logarifmlari orasidagi munosabatni aniqlaymiz. $y = \lg x$ yoki $x = 10^y$ bo'lsin. Bu tenglikning o'ng va chap tomonlarini e asosga ko'ra logarifmlaymiz:

$$\ln x = y \ln 10.$$

Bundan $y = \frac{\ln x}{\ln 10}$ yoki y ning qiymatini o'rniga qo'ysak:

$\lg x = \frac{1}{\ln 10} \ln x;$ $M = \frac{1}{\ln 10}$ deb belgilaymiz, $M \approx 0{,}434294$.

M soni natural logarifmdan o'nli logarifmga *o'tish moduli* deyiladi.

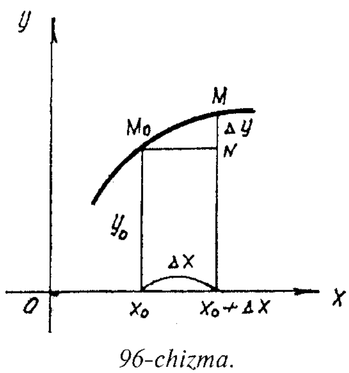
$\lg x = M \ln x$; $x=e$ deb faraz qilsak, $\lg e = M (\ln e = 1)$; $\ln x = \frac{1}{M} \lg x$; $\frac{1}{M} \approx 2{,}3025$.

Shunday qilib, $\ln x = 2{,}3025 \lg x$.

5.4. FUNKSIYANING UZLUKSIZLIGI

5.4.1. FUNKSIYALARNING UZLUKSIZLIGI

$y=f(x)$ funksiya $(a;\ b)$ intervalda aniqlangan bo'lsin. $x_0 \in (a;\ b)$ nuqtada unga funksiyaning $y_0 = f(x_0)$ qiymati to'g'ri kelsin. Boshqa biror $x \in (a;\ b)$ nuqtani olaylik. Agar x biror musbat yoki manfiy (farqi yo'q) Δx orttirma olsa, ya'ni $x = x_0 + \Delta x$ qiymatga ega bo'lib qolsa, u holda y funksiya ham biror Δy orttirma oladi.



96-chizma.

Funksiyaning yangi orttirilgan qiymati $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$ (96-chizma) bo'ladi. Argument orttirmasi $\Delta x = x - x_0$, funksiyaning orttirmasi esa $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ formula bilan ifodalanadi.

1-ta'rif. Agar $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada va uning biror atrofida aniqlangan bo'lib, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$ yoki $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x) - f(x_0)] = 0$ bo'lsa,

$x=x_0$ qiymatda (yoki x_0 nuqtada) funksiya *uzluksiz* deyiladi. Uzluksizlik shartini bunday yozish mumkin:

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) \tag{1}$$

yoki $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, ammo $x_0 = \lim\limits_{x\to x_0} x$ yoki (1) tenglikni tubandagicha yozish mumkin: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$, ya'ni $x \to x_0$ da uzluksiz funksiyaning limitini topish uchun funksiyaning ifodasida argument x o'rniga uning x_0 qiymatini qo'yish kifoya.

Berilgan nuqtada funksiya uzluksizligining geometrik tasviri shuni bildiradiki, agar faqat $|\Delta x|$ yetarli kichik bo'lsa, $x_0 + \Delta x$ va x_0 nuqtalarda funksiya grafigi ordinatalarining ayirmasi absolut qiymat bo'yicha kichik bo'ladi.

M i s o l. $y = x^2$ funksiyaning ixtiyoriy x_0 va xususan $x_0=2$ nuqtada uzluksizligini isbotlaymiz.

Y e c h i s h. a) $y_0 = x_0^2$; $y_0 + \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2$; $\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2$;

x istalgan usul bilan nolga intilganda (97 *a*, *b*-chizmalar):

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}(2x_0\Delta x + \Delta x^2) = 2x_0\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x + \lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x = 0;$$

b) $y_0 = 2^2=4$; $\Delta y = (2+\Delta x)^2 - 4$; $\Delta y = 4+4\Delta x+(\Delta x)^2 - 4 = 4\Delta x + (\Delta x)^2$;

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}(4\Delta x + (\Delta x)^2) = 4\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x + \lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x = 0.$$

1-teorema. *Chekli sondagi funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, unda ularning yig'indisi ham x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.*

I s b o t. Teoremani ikkita $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyalar uchun isbot qilamiz. $f_1(x)+f_2(x)=\varphi(x)$ bo'lsin. Funksiyalar uzluksiz bo'lgani uchun $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = f_1(x_0)$ va $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = f_2(x_0)$.

Limitlar haqidagi 1-teoremaga asosan:

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} [f_1(x) + f_2(x)] = \lim_{x \to x_0} f_1(x) + \lim_{x \to x_0} f_2(x) =$$

$$= f_1(x_0) + f_2(x_0) = \varphi(x_0).$$

Demak, yig'indi uzluksiz funksiya.

Limitlar nazariyasiga tayanib quyidagilarni ham isbotlash mumkin:

a) chekli sondagi uzluksiz funksiyalarning ko'paytmasi ham uzluksiz funksiyadir;

b) ikki uzluksiz funksiyaning bo'linmasi, agar qaralayotgan nuqtada maxraj nolga aylanmasa, uzluksiz funksiyadir;

d) agar $x=x_0$ da $u=\varphi(x)$ uzluksiz va $u_0=\varphi(x_0)$ nuqtada $f(u)$ funksiya uzluksiz bo'lsa, $f[\varphi(x)]$ murakkab funksiya ham x_0 nuqtada uzluksizdir. Bu teoremalardan foydalanib, quyidagi teoremani isbotlash mumkin.

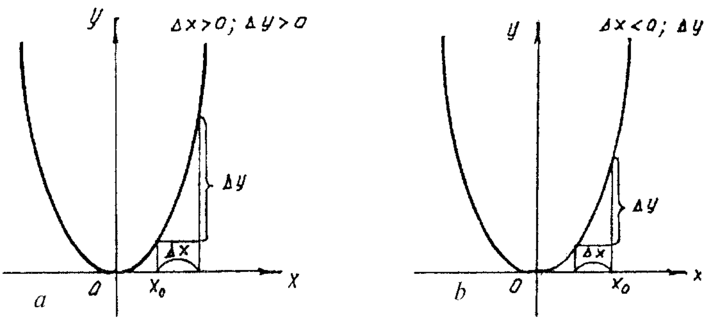
2-teorema. *Har qanday elementar funksiya o'zi aniqlangan har bir nuqtada uzluksizdir.*

2-ta'rif. Agar $y=f(x)$ funksiya biror $(a;\ b)$ intervalning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, funksiya shu *intervalda uzluksiz* deyiladi, bu yerda $a<b$.

3-ta'rif. Agar $y=f(x)$ funksiya $[a;\ x_0]$ oraliqda aniqlangan bo'lib, bunda $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada *o'ngdan uzluksiz* deyiladi.

4-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya $[x_0;\ b]$ oraliqda aniqlangan bo'lib, $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada *chapdan uzluksiz* deyiladi.

5-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya $(a;\ b)$ intervalning har bir nuqtasida hamda intervalning uchlarida tegishli ravishda o'ngdan va chapdan uzluksiz bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a;\ b]$ *yopiq intervalda* (yoki *kesmada) uzluksiz* deyiladi.



97-chizma.

Agar biror $x=x_0$ nuqtada $y=f(x)$ funksiya uchun uzluksizlik shartlaridan hech bo'lmaganda bittasi bajarilmasa, ya'ni:

1) funksiya x_0 nuqtada aniqlanmagan;

2) funksiya x_0 nuqtada aniqlangan, ammo chap va o'ng limitlardan kamida biri, ya'ni $f(x_0-0)$ va $f(x_0+0)$ lardan biri mavjud emas;

3) funksiya x_0 nuqtada aniqlangan, chap va o'ng limitlar mavjud, ammo ular o'zaro teng emas;

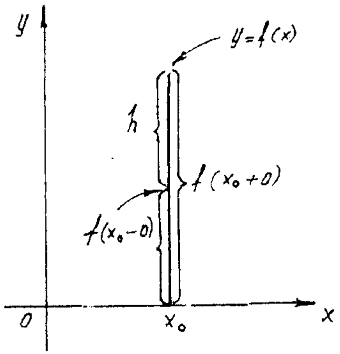
4) funksiya x_0 nuqtada aniqlangan, chap va o'ng limitlar mavjud va o'zaro teng, ammo ular funksiyaning bu nuqtadagi qiymatiga teng emas, ya'ni: $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$ bo'lsa, $y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada *uzilgan* bo'ladi. $x=x_0$ nuqta esa funksiyaning *uzilish nuqtasi* deyiladi. Uzilish nuqtalari turlicha bo'lib, ular bir-biridan farq qiladi.

6-ta'rif. Agar $y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada aniqlangan yoki aniqlanmagan bo'lib, chap va o'ng limitlar mavjud va o'zaro teng bo'lmasa, ya'ni $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$ bo'lsa, bu nuqta funksiyaning *birinchi tur uzilish nuqtasi* deyiladi. $f(x_0-0)-f(x_0+0)$ soni funksiyaning $x=x_0$ nuqtadagi *sakrashi* deyiladi (98-chizma). Qolgan barcha hollarda uzilishlar *ikkinchi tur uzilish* deyiladi.

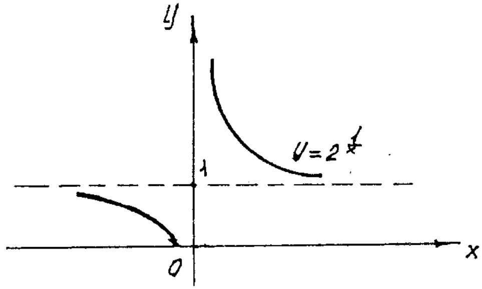
M i s o l l a r. $y=\frac{1}{x}$ funksiya $x=0$ nuqtada uziluvchidir (uzilishga ega). Haqiqatan ham, $x=0$ da funksiya aniqlanmagan: $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{1}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{1}{x}=-\infty$.

Bu funksiya $x\neq 0$ qiymatda uzluksiz ekanligini ko'rsatish oson;

2) $y=2^{\frac{1}{x}}$ funksiya $x=0$ da uziluvchi. Haqiqatan ham, $\lim\limits_{x\to 0+0}2^{\frac{1}{x}}=\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-0}2^{\frac{1}{x}}=0$.



98-chizma.



99-chizma.

$x=0$ da funksiya aniqlanmagan (99-chizma);

3) $f(x)=\frac{x}{|x|}$ funksiyani tekshiramiz.

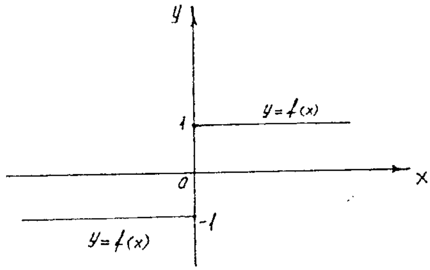
$x < 0$ da $\frac{x}{|x|}=-1$ bo‘ladi;

$x > 0$ da $\frac{x}{|x|}=1$ bo‘ladi.

Demak,

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}\frac{x}{|x|}=-1;$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}\frac{x}{|x|}=1.$$



100-chizma.

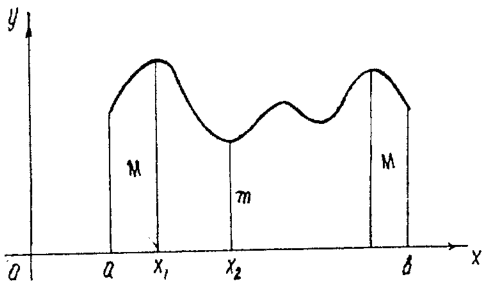
$x=0$ da funksiya aniqlanmagan. $x=0$ da funksiya uziluvchi (100-chizma).

5.4.2. UZLUKSIZ FUNKSIYALARNING BA’ZI XOSSALARI

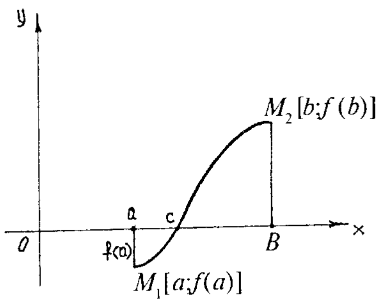
Xossalar quyidagi teoremalar bilan ifodalanadi:

1-teorema. *Agar $y=f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, u holda $[a; b]$ kesmada funksiya o‘zining eng kichik va eng katta qiymatiga erishadi, ya’ni shunday $x_1, x_2 \in (a; b)$ nuqtalar mavjudki, barcha $x\in(a; b)$lar uchun $f(x_1)\geq f(x)$ va $f(x_2)\leq f(x)$ tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi.*

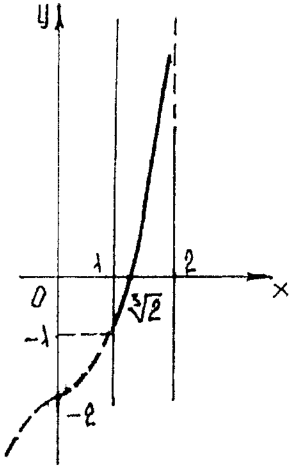
Funksiyaning $f(x_1)$ qiymatini $y=f(x)$ funksiyaning $[a; b]$ kesmadagi *eng katta qiymati* deb, $f_2(x)$ ni esa *eng kichik qiymati* deb ataymiz. Bu teorema qisqacha bunday ifodalanadi:



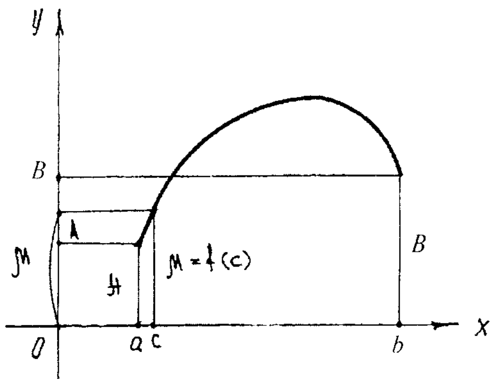
101-chizma.



102-chizma.



103 chizma.



104-chizma.

Kesmada uzluksiz funksiya hech bo'lmaganda bir marta eng katta M qiymatga va eng kichik m qiymatga erishadi (101-chizma).

2-teorema. *Agar $y=f(x)$ funksiya $[a;\ b]$ kesmada uzluksiz bo'lib, bu kesmaning uchlarida turli ishorali qiymatlarni qabul qilsa, u holda $[a;\ b]$ kesmada hech bo'lmaganda shunday bir $x=c$ nuqta topiladiki, bu nuqtada funksiya nolga aylanadi: $f(c)=0$; $a<c<b$* (102-chizma).

M i s o l. $y=x^3-3$ funksiya berilgan. Bu funksiya $[1;\ 2]$ kesmada uzluksiz. Demak, bu kesmada $y=x^3-3$ nolga aylanadigan nuqta mavjud. Haqiqatan ham, $x=\sqrt[3]{3}$ da $y=0$ (103-chizma).

3-teorema. *$y=f(x)$ funksiya $[a;\ b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. Agar kesmaning uchlarida funksiya teng bo'lmagan $f(a)=A$, $f(b)=B$ qiymatlarni qabul qilsa, u holda funksiya A va B sonlar orasidagi barcha qiymatlarni qabul qiladi. μ son uchun $A<\mu<B$ shartni qanoatlantiradigan istalgan kamida bitta $c\in[a;\ b]$ nuqta mavjudki, unda $f(c)=\mu$ tenglik to'g'ri bo'ladi* (104-chizma).

2-teorema bu teoremaning xususiy holi, chunki A va B lar turli ishoralarga ega bo'lsa, u holda μ ning o'rniga 0 ni olish mumkin.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. O'zgaruvchi miqdorning limiti ta'rifini tengsizlik yordamida ifodalang va uni geometrik nuqtayi nazardan tushuntiring.
2. Funksiyaning $x\to a$ dagi limiti ta'rifini tengsizlik yordamida ifodalang va uni geometrik nuqtayi nazardan tushuntiring.

3. Qanday holatda o'zgaruvchi x miqdor cheksizlikka intiladi deyiladi?
4. Funksiyaning o'ng va chap limitlari nima?
5. Qachon $y=f(x)$ funksiya $x \to a$ da, $x \to \infty$ da cheksiz kichik deb ataladi?
6. Cheksiz katta va cheksiz kichik funksiyalar orasida qanday bog'lanish bor?
7. Limitga ega bo'lgan funksiya bilan cheksiz kichik funksiya orasida qanday bog'lanish bor?
8. Funksiyalar yig'indisining, ko'paytmasining limiti haqidagi teoremalarni isbotlang.
9. Bo'linmaning limiti haqidagi teoremani isbotlang.
10. Oraliq funksiyaning limiti haqidagi teoremani aytib bering.
11. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ekanligini isbotlang.
12. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ekanligini isbotlang.
13. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ ekanligini isbotlang.
14. Natural logarifm ta'rifini ayting. Natural logarifmdan o'nli logarifmga va aksincha qanday o'tiladi?
15. $y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi uzluksizligi ta'rifini keltiring va geometrik talqin eting.
16. $y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada chapdan va o'ngdan uzluksizligi ta'rifini aytib bering.
17. Uzluksiz funksiyalar ustida arifmetik amallar haqidagi teoremalarni ta'riflang va isbotlang.
18. Asosiy elementar funksiyalarning uzluksizligi to'g'risidagi teoremani aytib, misollar yordamida isbot qiling.
19. Kesmada uzluksiz funksiyalarning xossalarini ta'riflab bering.
20. Funksiyaning uzilish nuqtasi deb nimaga aytiladi? Misollar keltiring.
21. Birinchi va ikkinchi tur uzilish nuqtalari deb nimaga aytiladi? Misollar keltiring.

6-bob. BIR O'ZGARUVCHILI FUNKSIYANING DIFFERENSIAL HISOBI

6.1. HOSILA

6.1.1. HOSILA TUSHUNCHASIGA OLIB KELADIGAN MASALA

Hosila tushunchasiga olib keladigan masalalar jumlasiga qattiq jismning to'g'ri chiziqli harakati, ya'ni yuqoriga vertikal holda otilgan jismning harakatini yoki dvigatel silindridagi porshen harakatini kiritish mumkin. Bunday harakatlarni tekshirganda jismning konkret o'lchamlarini va shaklini e'tiborga olmay, uni harakat qiluvchi moddiy nuqta shaklida tasavvur qilamiz.

Aytaylik, M moddiy nuqtaning to'g'ri chiziqli harakat qonuniga ko'ra uning $t = t_0$ paytdagi tezligini (oniy tezligini) topish talab qilinsin. Nuqtaning t_0 va $t_0 + \Delta t (\Delta t \neq 0)$ vaqtlar orasidagi bosib o'tgan yo'li $\Delta S = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$ bo'ladi. Uning shu vaqtdagi o'rtacha tezligi $\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$ ga teng.

Ma'lumki, Δt qanchalik kichik bo'lsa, $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ o'rtacha tezlik nuqtaning t_0 paytdagi tezligiga shunchalik yaqin bo'ladi. Shuning uchun nuqtaning t_0 paytdagi tezligi quyidagi limitdan iborat: $V(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$.

6.1.2. FUNKSIYANING HOSILASI

$y = f(x)$ funksiya $(a; b)$ intervalda aniqlangan bo'lsin. $(a; b)$ intervalga tegishli x_0 va $x_0 + \Delta x$ nuqtalarni olamiz. Argument biror (musbat yoki manfiy — baribir) Δx orttirmasini olsin, u vaqtda y funksiya biror Δy orttirmani oladi. Shunday qilib, argumentning x_0 qiymatida $y_0 = f(x_0)$ ga, argumentning $x_0 + \Delta x$ qiymatda $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$ ga ega bo'lamiz. Funksiya orttirmasi Δy ni topamiz:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0). \tag{1}$$

Funksiya orttirmasini argument orttirmasiga nisbatini tuzamiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{2}$$

Bu nisbatning $\Delta x \to 0$ dagi limitini topamiz.

Agar bu limit mavjud bo'lsa, u berilgan $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi *hosilasi* deyiladi va $f'(x_0)$ bilan belgilanadi. Shunday qilib, ta'rifga ko'ra:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{yoki} \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (3)$$

Demak, berilgan $y = f(x)$ funksiyaning argument x bo'yicha hosilasi deb, argument orttirmasi Δx ixtiyoriy ravishda nolga intilganda, funksiya orttirmasi Δy ning argument orttirmasi Δx ga nisbatining limitiga aytiladi.

Umumiy holda, x ning har bir qiymati uchun $f'(x)$ hosila ma'lum qiymatga ega, ya'ni hosila ham x ning funksiyasi bo'lishini qayd qilamiz. Hosilani belgilashda $f'(x)$ dan tashqari boshqacha belgilar ham ishlatiladi:

$$y'; \; y'_x, \; \frac{dy}{dx}.$$

Hosilaning $x = a$ dagi tayin qiymati $f'(a)$ yoki $y'\Big|_{x=a}$ kabi belgilanadi.

Berilgan $f(x)$ funksiyaning hosilasini topish amali shu funksiyani *differensiallash* deyiladi.

6.1.3. FUNKSIYA HOSILASINI BEVOSITA HOSILA TA'RIFIGA KO'RA HISOBLASH

1-misol. $y = x^2$ funksiya berilgan, uning:

1) ixtiyoriy x nuqtadagi va 2) $x = 5$ nuqtadagi hosilasi y' ni toping.

Yechish. 1) argumentning x ga teng qiymatida funksiya $y = x^2$ ga teng. Argumentning $x + \Delta x$ qiymatida $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$ ga ega bo'lamiz, $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x(\Delta x) + (x)^2$; $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatni tuzamiz: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x+\Delta x(\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$. Limitga o'tib, berilgan funksiya hosilasini topamiz: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x$.

Demak, $y = x^2$ funksiyaning ixtiyoriy nuqtadagi hosilasi: $y' = 2x$.

2) $x = 5$ da: $y'\Big|_{x=5} = 2 \cdot 5 = 10.$

2-misol. $f(x) = \frac{1}{x}$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. Hosila ta'rifidan foydalanib, ketma-ket topamiz:

$$y = \frac{1}{x}; \quad y + \Delta y = \frac{1}{x+\Delta x},$$

$$\Delta y = \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x-x-\Delta x}{(x+\Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)},$$

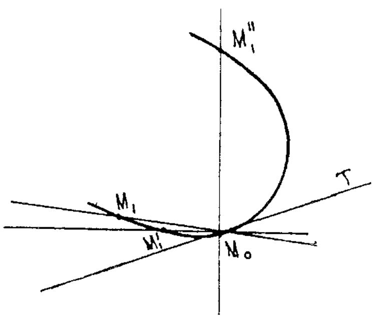
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x+\Delta x)},$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[-\frac{1}{x(x+\Delta x)}\right] = -\frac{1}{x^2}.$$

6.1.4. HOSILANING GEOMETRIK MA'NOSI

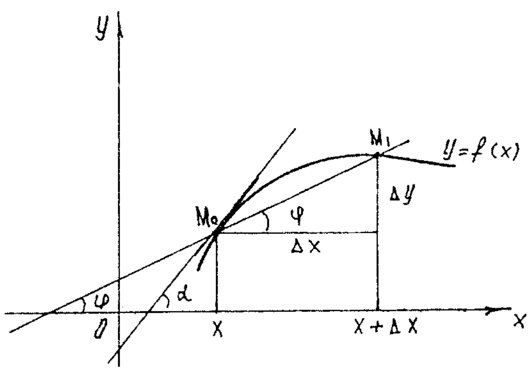
Harakat qiluvchi jismning tezligini tekshirish natijasida, ya'ni mexanik tasavvurlardan chiqib borib, hosila tushunchasiga keldik. Endi hosilaning geometrik ma'nosini aniqlaymiz. Buning uchun avval egri chiziqqa uning berilgan nuqtasida o'tkazilgan urinmani ta'riflab berishimiz kerak. Biror egri chiziq va unda tayin M_0 nuqta berilgan bo'lsin. Egri chiziqda bir M_1 nuqtani olamiz va $M_0 M_1$ kesuvchini o'tkazamiz. Agar M_1 nuqta egri chiziq bo'yicha M_0 nuqtaga cheksiz yaqinlasha borsa, u holda M_0M_1, kesuvchi M_0M_1', $M_0M''_1$ va h. k. turli vaziyatlarni oladi.

Agar M_0 nuqta egri chiziq bo'yicha istalgan tomondan nuqtaga cheksiz yaqinlasha borganda kesuvchi ma'lum M_0T to'g'ri chiziq vaziyatini egallashga intilsa, u holda bu to'g'ri chiziq M_0 nuqtada egri chiziqqa urinma deyiladi (105-chizma).



105-chizma.

To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida $y = f(x)$ ga mos egri chiziqni qaraylik, x ning biror qiymatida funksiya $y = f(x)$ qiymatga ega. Egri chiziqda x va y ning bu



106-chizma.

qiymatlariga $M_0(x; y)$ nuqta to'g'ri keladi. Argument x ga orttirma beramiz. Argumentning yangi $x + \Delta x$ orttirilgan qiymatiga funksiyaning orttirilgan $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ qiymati to'g'ri keladi. Egri chiziqning bunga mos nuqtasi $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ nuqta bo'ladi.

M_0M_1 kesuvchini o'tkazamiz va uni Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilingan burchagini φ bilan belgilaymiz. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatni tuzamiz. Chizmadan: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \mathrm{tg}\varphi$ ekanligi ko'rinadi. Endi agar Δx nolga intilsa, u holda kesuvchi M nuqta atrofida aylanadi (106-chizma).

Agar $\Delta x \to 0$ da φ burchak biror α limitga intilsa, u holda M_0 nuqtadan o'tuvchi va abssissalar o'qining musbat yo'nalishi bilan α burchak tashkil qiluvchi to'g'ri chiziq izlangan urinma bo'ladi. Uning burchak koeffitsiyentini topish qiyin emas.

Demak, $\mathrm{tg}\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \mathrm{tg}\varphi = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$, ya'ni argument x ning berilgan qiymatida $f'(x)$ hosilaning qiymati $f(x)$ funksiyaning grafigiga uning $M_0(x; y)$ nuqtasidagi urinmaning Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchak koeffitsiyentiga teng.

6.1.5. FUNKSIYANING DIFFERENSIALLANUVCHANLIGI

Ta'rif. Agar $y = f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada chekli hosilaga ega bo'lsa, ya'ni $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ mavjud bo'lsa, u holda berilgan $x = x_0$ qiymatda funksiya *differensiallanuvchi* yoki *hosilaga ega* deyiladi. Agar funksiya biror $[a; b]$ kesmaning yoki $(a; b)$

intervalining har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo'lsa, u holda funksiya kesmada yoki intervalda differensiallanuvchi deyiladi.

Teorema. *Agar $y = f(x)$ funksiya biror $x = x_0$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda funksiya shu nuqtada uzluksizdir.*

I s b o t . $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lgani uchun $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$ — chekli son.

Limitga ega bo'lgan funksiya o'zgarmas va cheksiz kichik funksiya yig'indisiga teng bo'lgani uchun quyidagicha yoza olamiz:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \gamma$, bu yerda: $\Delta x \to 0$ da γ nolga intiluvchi funksiya, u holda $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \gamma \Delta x$ bo'ladi.

Bundan $\Delta x \to 0$ da $\Delta y \to 0$, bu esa x_0 nuqtada $f(x)$ funksiya uzluksiz, demakdir.

Shunday qilib, uzilish nuqtasida funksiya hosilaga ega bo'la olmaydi. Teskari xulosa to'g'ri emas, ya'ni biror $x = x_0$ nuqtada $y = f(x)$ funksiya uzluksiz bo'lishidan bu nuqtada u differensiallanuvchi ham bo'ladi, degan xulosaga chiqmaydi, x_0 nuqtada funksiya hosilaga ega bo'lmasligi ham mumkin.

6.1.6. O'ZGARMAS MIQDORNING HOSILASI, O'ZGARMAS MIQDOR BILAN FUNKSIYA KO'PAYTMASINING HOSILASI, YIG'INDINING, KO'PAYTMANING, BO'LINMANING HOSILASI

1. O'zgarmas miqdorning hosilasi nolga teng, ya'ni agar $y = C$ bo'lsa, $C = \text{const}$, $y' = 0$ bo'ladi.

2. O'zgarmas ko'paytuvchini hosila ishorasidan tashqari chiqarish mumkin: $y = Cu(x)$ bo'lsa, $y' = Cu'(x)$ bo'ladi.

3. Chekli sondagi differensiallanuvchi funksiyalar yig'indisining hosilasi shu funksiyalar hosilalarining yig'indisiga teng:

$$y = U(x) + V(x) + W(x); \quad y' = U'(x) + V'(x) + W'(x).$$

4. Ikkita differensiallanuvchi funksiya ko'paytmasining hosilasi birinchi funksiya hosilasining ikkinchi funksiya bilan ko'paytmasi plus birinchi funksiyaning ikkinchi funksiya hosilasi bilan ko'paytmasiga teng, ya'ni $y = uv$ bo'lsa, $y' = u'v + uv'$.

5. Kasrning hosilasi kasrga teng bo'lib, uning maxraji berilgan kasr maxrajining kvadratidan, surati esa maxrajining surat hosilasi

va suratning maxraj hosilasi bilan ko'paytmalari orasidagi ayirmadan iborat, ya'ni agar $y = \frac{u}{v}$ bo'lsa $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

6.1.7. OSHKORMAS FUNKSIYA VA UNI DIFFERENSIALLASH

Ikkita x va y o'zgaruvchilarning qiymatlari o'zaro biror tenglama bilan bog'langan bo'lsa, uni tubandagicha belgilaymiz:

$$F(x, y) = 0. \tag{1}$$

Agar $y = f(x)$ funksiya biror $(a; b)$ intervalda aniqlangan bo'lib, (1) tenglamada y o'rniga $f(x)$ ifoda qo'yilganda tenglama x ga nisbatan ayniyatga aylansa, u holda $y = f(x)$ funksiya (1) tenglama bilan aniqlangan *oshkormas* funksiya bo'ladi.

Masalan, $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ tenglama quyidagi $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$ elementar funksiyalarni oshkormas tarzda aniqlaydi. Oshkormas funksiyalarni oshkor tarzda, ya'ni $y = f(x)$ ko'rinishida ifodalab bo'lavermaydi. Masalan: $y^7 - y^2 - x^2 = 0$.

Endi oshkormas funksiyalardan hosila olishni ko'rsatamiz.

1-misol. $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. Berilgan funksiyaning ikki tomonini x bo'yicha differensiallab (murakkab funksiyani differensiallash qoidasidan foydalanib), quyidagini topamiz:

$$2x + 2yy' = 0, \quad y' = -\frac{x}{y};$$

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad y' = -\frac{x}{y}.$$

2-misol. $y^7 - y^2 - x^2 = 0$.

Buni x bo'yicha differensiallaymiz:

$$7y^6y' - 2yy' - 2x = 0,$$

$$y'(7y^6 - 2y) = 2x,$$

$$y' = \frac{2x}{7y^6 - 2y}.$$

6.2. MURAKKAB, TESKARI VA BA'ZI BIR ELEMENTAR FUNKSIYALARNING HOSILALARI

6.2.1. MURAKKAB FUNKSIYANING HOSILASI

Aytaylik, $y = F(x)$ murakkab funksiya bo'lsin, ya'ni $y = F(u)$, $u = \varphi(x)$ yoki $y = F[\varphi(x)]$ bo'lsin; u o'zgaruvchi *oraliq argument* deyiladi, $y = F(u)$ va $u = \varphi(x)$ — differensiallanuvchi funksiyalar bo'lsin.

Murakkab funksiyani differensiallash qoidasini keltirib chiqaramiz.

Teorema. *Murakkab F(u) funksiyaning erkli o'zgaruvchi x bo'yicha hosilasi bu funksiyaning oraliq argumenti bo'yicha hosilasining oraliq argumentining erkli o'zgaruvchi x bo'yicha hosilasiga ko'paytmasiga teng, ya'ni*

$$y'_x = F'_u(u) \cdot u'_x(x). \tag{1}$$

M i s o l. $y = (x^5 + 4x^4 + 3x^2 + 2)^5$ funksiyaning hosilasini toping.

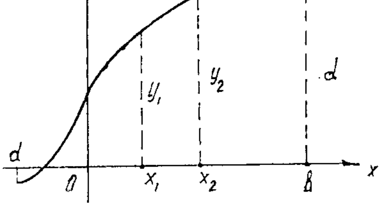
Y e c h i s h. Berilgan funksiyani murakkab funksiya deb qaraymiz, ya'ni $y = u^5$ deymiz, bu yerda:

$$u = x^5 + 4x^4 + 3x^2 + 2.$$

(1) formulaga asosan:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = ((x^5 + 4x^4 + 3x^2 + 2)^5)' =$$
$$= 5(x^5 + 4x^4 + 3x^2 + 2)^4 \cdot (5x^4 + 16x^3 + 6x).$$

6.2.2. TESKARI FUNKSIYA VA UNI DIFFERENSIALLASH



107-chizma.

Aytaylik, biror $[a; b]$ kesmada aniqlangan o'suvchi yoki kamayuvchi $y = f(x)$ (1) funksiya berilgan bo'lsin. Shu bilan birga $f(a) = c$, $f(b) = d$ bo'lsin (107-chizma).

Aniqlik uchun o'suvchi funksiyani tekshiraylik. $[a; b]$ kesmaga tegishli ikkita har xil x_1 va x_2 qiymatlarni qaraymiz.

O‘suvchi funksiya ta’rifidan, agar $x_1 < x_2$ va $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ bo‘lsa, u vaqtda $y_1 < y_2$ bo‘lishi kelib chiqadi. Shunday qilib, x ning qiymatlari bilan y ning ularga mos qiymatlari orasidagi o‘zaro bir qiymatli moslik aniqlanadi.

y ning qiymatlarini argumentning qiymatlari deb, x ning qiymatlarini esa funksiyaning qiymatlari deb qarab, x ni y ning funksiyasi sifatida olamiz:

$$x = \varphi(y). \tag{2}$$

Bu funksiya $y = f(x)$ funksiya uchun *teskari funksiya* deyiladi. $y = f(x)$ funksiya ham $x = \varphi(y)$ funksiya uchun teskari funksiya ekanligi ravshan. Xuddi shuningdek, kamayuvchi funksiya ham teskari funksiyaga ega ekanligini ko‘rsatish mumkin.

Teskari funksiya $y = f(x)$ tenglamani x ga nisbatan yechish yo‘li bilan topiladi. Bu funksiyalarning grafiklari ustma-ust tushadi. Agar teskari funksiya argumentini yana x bilan, funksiyani esa y bilan belgilasak va ularni bir koordinatalar sistemasida chizsak, u holda ikkita har xil grafik yechim bo‘ladi. Grafiklar birinchi koordinata burchagining bissektrisasiga nisbatan simmetrik bo‘ladi.

Endi teskari funksiyaning hosilasini bilgan holda $y = f(x)$ funksiya hosilasini topishga imkon beruvchi teoremani ko‘rib o‘tamiz.

Teorema. *Agar $y = f(x)$ funksiya uchun tekshiriladigan y nuqtada noldan farqli $\varphi'(y)$ hosilaga ega bo‘lgan $x = \varphi(y)$ teskari funksiya mavjud bo‘lsa, u holda tegishli x nuqtada $y = f(x)$ funksiya $y = \frac{1}{\varphi'(y)}$ ga teng bo‘lgan $f'(x)$ hosilaga ega bo‘ladi, ya’ni $f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$.*

I s b o t. Δy orttirmani olganimizda $\Delta x = \varphi(y + \Delta y) - \varphi(y)$; (2) ga asosan $\varphi(y)$ monoton funksiya bo‘lgani uchun $\Delta x \neq 0$.

Ushbu ayniyatni yozamiz: $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$. Bu yerda $\Delta y \to 0$ da $\Delta x \to 0$.

$\Delta y \to 0$ da limitga o‘tamiz:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} \quad \text{yoki} \quad f'(x) = \frac{f}{\varphi'(y)}.$$

6.2.3. BA'ZI ELEMENTAR FUKSIYALARNING HOSILALARI

1) logarifmik funksiyaning hosilasi

1-teorema. $y = \log_a x$ *funksiyaning hosilasi* $\frac{1}{x}\log_a l$ *ga teng, ya'ni agar* $y = \log_a x$ *bo'lsa,* $y' = \frac{1}{x}\log_a l$ *bo'ladi.*

Isbot. x ga Δx ga orttirma beramiz, u holda y ham Δy orttirma oladi, ya'ni $y + \Delta y = \log_a(x + \Delta x)$.

$$\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right) = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Tenglikning har ikkala tomonini Δx ga bo'lamiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\cdot\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right);\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\frac{x}{\Delta x}\cdot\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{x}\cdot\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)\frac{x}{\Delta x}.$$

Ushbu $\frac{\Delta x}{x} = a$ belgilashni kiritamiz, u holda $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\cdot\log_a(1 + a)^{\frac{1}{a}}$.

$\frac{\Delta x}{x} = a$ bo'lgani uchun, $y' = \lim\limits_{a\to 0}\frac{1}{x}\cdot\log_a(1 + a)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{x}\log_a e$ bo'ladi.

$$\log_a e = \frac{1}{\ln\alpha};\qquad y' = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln\alpha}.$$

Agar $y = \ln x$ bo'lsa, $y' = \dfrac{1}{x}$ bo'ladi.

2) n butun va musbat bo'lganda $y = x^n$ funksiyaning hosilasi

2-teorema. $y = x^n$ *funksiyaning hosilasi (bunda n butun musbat)* nx^{n-1} *ga teng, ya'ni* $y = x^n$ *bo'lsa,* $y' = n\cdot x^{n-1}$*ga teng.*

Isbot. Hosila ta'rifidan foydalanib, ketma-ket topamiz:

1) $y + \Delta y = (x + \Delta x)^n$;

2) $\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + $
$+ (\Delta x)^n - x^n$

yoki $\Delta y = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n$;

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1}$;

4) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1} \right] =$

$= nx^{n-1}$.

Demak, $y' = nx^{n-1}$. Bu formulaning n — kasr va manfiy bo'lgan holda ham to'g'riligini ko'rsatish mumkin.

3) $y = \sin x$, $y = \cos x$ funksiyalarning hosilalari

3-teorema. $\sin x$ *ning hosilasi* $\cos x$ *ga teng, ya'ni agar* $y = \sin x$ *bo'lsa,* $y' = \cos x$.

Isbot. 1) $y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$;

2) $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{x + \Delta x - x}{2} \cdot \cos\frac{x + \Delta x + x}{2} =$

$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$;

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$;

4) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$,

ammo $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$, demak, $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$.

4-teorema. $\cos x$ *ning hosilasi* $-\sin x$ *ga teng, ya'ni*

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Isbot. (Yuqoridagiga o'xshash isbot qilinadi.)

5-teorema. $\operatorname{tg} x$ *ning hosilasi* $-\frac{1}{\cos^2 x}$ *ga teng, ya'ni*

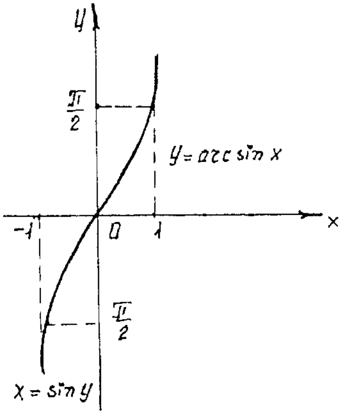
$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

6-teorema. ctg x *ning hosilasi* $-\frac{1}{\sin^2 x}$ *ga teng, ya'ni*

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Bu teoremalarni mustaqil isbot qilish talabalarning o'zlariga topshiriladi.

6.2.4. TESKARI TRIGONOMETRIK FUNKSIYALAR VA ULARNING HOSILALARI



108-chizma.

1) $y = \arcsin x$ funksiyani qaraylik. Buning uchun ushbu $x = \sin y$ funksiyani olamiz. Bu funksiya $-\infty < y < +\infty$ intervalda aniqlangan (108-chizma). $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ kesmada funksiya o'suvchi, uning qiymatlari $-1 \le x \le 1$ kesmani to'ldiradi. $x = \sin y$ funksiyaga teskari funksiya mavjud. Bu funksiya $-1 \le x \le 1$ kesmada aniqlangan, uning qiymatlari $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ kesmani to'ldiradi.

1-teorema. arcsin x *funksiyaning hosilasi* $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *ga teng.*

I s b o t. $x = \sin y$, $x'_y = \cos y$. Teskari funksiyani differensiallash qoidasiga binoan: $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y}$; $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$ bo'lganidan $y'_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ga teng, $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$.

Ildiz oldida plus ishora olinadi, chunki $y = \arcsin x$ funksiya $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ kesmada qiymatlar qabul qiladi. Demak, $\cos y \ge 0$.

M i s o l. $y = \arcsin e^x$ berilgan. $y' = \frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}} \cdot (e^x)' = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

2-teorema. $y = \arccos x$ *ning hosilasi* $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *ga teng.*

3-teorema. $y = \text{arctg}\, x$ *ning hosilasi* $y' = \frac{1}{1-x^2}$ *ga teng.*

4-teorema. $y = \text{arcctg}\, x$ *ning hosilasi* $y' = -\frac{1}{1-x^2}$ *ga teng.*

Yuqoridagi teoremalarni mustaqil isbot qilish talabalarga topshiriladi.

6.2.5. DIFFERENSIALLASHNING ASOSIY FORMULALARI

Yuqorida keltirib chiqarilgan barcha formulalar va qoidalarni tubandagicha jadval ko'rinishida yozamiz:

1) $y = C\,(C-\text{const}),$ $\quad y' = 0;$

2) $y = x^{\alpha},$ $\quad y = \alpha x^{\alpha-1};$

3) $y = \sqrt{x},$ $\quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$

4) $y = \frac{1}{x},$ $\quad y = -\frac{1}{x^2};$

5) $y = a^x;$ $\quad y' = a^x \ln a;$

6) $y = e^x,$ $\quad y' = e^x;$

7) $y = \log_a x,$ $\quad y' = \frac{1}{x}\log_a e;$

8) $y = \ln x,$ $\quad y' = \frac{1}{x};$

9) $y = \sin x,$ $\quad y' = \cos x;$

10) $y = \cos x,$ $\quad y' = -\sin x;$

11) $y = \text{tg}\, x,$ $\quad y' = \frac{1}{\cos^2 x};$

12) $y = \text{ctg}\, x,$ $\quad y' - \frac{1}{\sin^2 x};$

13) $y = \text{arctg}\, x,$ $\quad y' = \frac{1}{1+x^2};$

14) $y = \text{arcctg}\, x,$ $\quad y' = -\frac{1}{1+x^2};$

15) $y = \arcsin x, \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

16) $y = \arccos x, \qquad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

Differensiallashning umumiy qoidalari

1) $y = Cu(x), \qquad y' = Cu'(x) \quad (C - \text{const}).$

2) $y = u + v + w, \qquad y' = u' + v' + w';$

3) $y = u \cdot v, \quad y' = u' \cdot v + u \cdot v';$

4) $y = \frac{u}{v}, \qquad y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2};$

5) $\left.\begin{array}{l} y = f(\upsilon) \\ \upsilon = f(x) \end{array}\right\}, \qquad y' = f_y'(\upsilon) \cdot v_x'(\upsilon);$

6) $y = u^v, \qquad y' = vu^{v-1}u' + uv' \ln u;$

7) $y = (x)$ ga $x = \varphi(y)$ teskari

funksiya bo‘lsa, $f'(x) = \frac{1}{\varphi'(x)}.$

6.2.6. PARAMETRIK KO‘RINISHDA BERILGAN FUNKSIYANING HOSILASI

Ushbu ikkita tenglamani qaraylik:

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{array}\right\} \tag{1}$$

bu yerda: $t \in [T_1; T_2]$ kesmadagi qiymatlarni qabul qiladi. t ning har bir qiymatiga x va y ning qiymatlari to‘g‘ri keladi. Agar x va y qiymatlarga Oxy koordinata tekisligidagi nuqtaning koordinatalari deb qaralsa, u holda t ning har bir qiymatiga tekislikning ma’lum bir nuqtasi to‘g‘ri keladi. t ning qiymatlari T_1 dan T_2 gacha o‘zgarsa, bu nuqta tekislikda biror egri chiziqni chizadi. Shuning uchun (1) tenglamalarga egri chiziqning parametrik tenglamalari deyiladi, t parametr deyiladi. Egri chiziqni (1) tenglamalar bilan berish usuli esa parametrik usul deyiladi. Egri chiziqlarning parametrik tarzda berilishi mexanikada keng qo‘llaniladi.

(1) tenglamadan t parametrni chiqarsak, $F(x, y) = 0$ ko'rinishdagi tenglamaga ega bo'lamiz.

6.2.7. BA'ZI EGRI CHIZIQLARNING PARAMETRIK TENGLAMALARI

$$\begin{cases} x = r\cos t, & 0 \le t \le 2\pi \\ y = r\sin t. \end{cases}$$ — aylananing parametrik tenglamasi.

$$\begin{cases} x = a\cos t, & 0 \le t \le 2\pi \\ y = b\sin t. \end{cases}$$ — ellipsning parametrik tenglamasi.

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), & 0 \le t \le 2\pi \\ y = a(t - \cos t). \end{cases}$$ — sikloidaning parametrik tenglamasi.

$$\begin{cases} x = a\cos 3t, & 0 \le t \le 2\pi \\ y = a\sin 3t. \end{cases}$$ — astroidaning parametrik tenglamasi.

6.3. YUQORI TARTIBLI HOSILALAR. LOPITAL QOIDASI

6.3.1. YUQORI TARTIBLI HOSILALAR

$y = f(x)$ funksiya biror $(a;\ b)$ intervalda differensiyallanuvchi bo'lsin. $f'(x)$ hosilaning qiymatlari, umuman aytganda, x ga bog'liq, ya'ni $f'(x)$ hosila ham x ning funksiyasidan iborat.

Bu funksiyani differensiallab, $f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi deb ataladigan hosilani topamiz.

Birinchi hosiladan olingan hosila *ikkinchi tartibli hosila* deyiladi va y'' yoki $f''(x)$ bilan belgilanadi.

Ikkinchi hosilaning hosilasi *uchinchi tartibli hosila* deb ataladi va y''' yoki $f'''(x)$ bilan belgilanadi.

Umuman, $f(x)$ funksiyaning *n-tartibli hosilasi* deb uning $(n - 1)$-tartibli hosilasining hosilasiga aytiladi va $y^{(n)}$ yoki $f^{(n)}(x)$ bilan belgilanadi.

Ta'rifdan ko'rinadiki, tubandagi formulalar ham o'rinlidir:

$$(u + v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}, \quad (Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}.$$

Ikki funksiya ko‘paytmasi $u(x) \cdot v(x)$ ning n-tartibli hosilasi uchun quyidagi formula o‘rinlidir:

$$y' = (u \cdot v)^n = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}\, v' + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\, u^{(n-2)} \cdot v'' + \ldots + uv^{(n)}.$$

Bu formula Leybnits formulasidir.

6.3.2. IKKINCHI TARTIBLI HOSILANING FIZIK MA’NOSI

M moddiy nuqtaning Ox o‘qi bo‘ylab notekis harakatini qaraylik. Bu harakat qonuni

$$x = f(t) \tag{1}$$

formula bilan berilgan bo‘lsin, bunda x — moddiy nuqta koordinatasi, t — vaqt.

Oniy tezlik $v(t)$ quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$v(t) = f'(t). \tag{2}$$

Bu tezlik moddiy nuqta koordinatasini vaqtga bog‘liq o‘zgarishini xarakterlaydi. Tezlikning o‘zini vaqtga bog‘liq o‘zgarishini xarakterlash uchun tezlanish formulasini keltiramiz:

$$a(t) = v'(t). \tag{3}$$

Ikkinchi tartibli hosila ta’rifiga ko‘ra:

$$a(t) = f''(t) = x''. \tag{4}$$

Shunday qilib, ikkinchi tartibli hosila fizik nuqtayi nazardan tezlanishni ifodalar ekan.

6.3.3. LOPITAL QOIDASI

1) ikkita funksiya orttirmalarining nisbati haqida.

Teorema (Koshi teoremasi). *Agar ikkita $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz va uning ichida differensiallanuvchi bo‘lsa, shu bilan birga shu kesma ichining hech qayerida nolga aylanmasa, u holda $[a; b]$ kesma ichida shunday $x = c$ $(a < c < b)$ nuqta topiladiki, unda*

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$$

bo'ladi.

2) ikkita cheksiz kichik miqdor nisbatining limiti $\left(\frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty}\right)$ ko'rinishdagi aniqmaslikni ochish.

Aytaylik, biror $[a;\ b]$ kesmada $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar Koshi teoremasining shartlarini qanoatlantirsin va bu kesmaning $x=a$ nuqtasida nolga aylansin, ya'ni $f(a)=0$ va $\varphi(a)=0$ bo'lsin. Bu $x=a$ qiymatda $f(x)/\varphi(x)$ nisbat aniqlanmagan, ammo $x\neq a$ qiymatlarda to'la ma'noga ega. $x\to a$ da bu nisbatning limitini topish talab qilinsin.

Bu turdagi limitlarni hisoblash *aniqmasliklarni ochish* deyiladi.

Teorema (Lopital qoidasi). *Aytaylik, biror $[a;\ b]$ kesmada $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar Koshi teoremasining shartlarini qanoatlantirsin va uning biror $x=a$ nuqtasida nolga aylansin, ya'ni $f(a)=\varphi(a)=0$ bo'lsin, u holda agar $x\to a$ da $f'(x)/\varphi'(x)$ nisbatning limiti mavjud bo'lsa, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ham mavjud bo'ladi va shu bilan birga:*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Agar $f'(x)=\varphi'(x)=0$ bo'lsa va $f(x)$, $\varphi(x)$ funksiyalarga qo'yilgan shartlarni $f'(x)$, $\varphi'(x)$ hosilalar qanoatlantirsa, u holda $f'(x)/\varphi'(x)$ nisbatga Lopital qoidasini qo'llanib, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$ formulaga kelamiz.

Agar $\varphi'(a)=0$, lekin $f'(x)\neq 0$ bo'lsa, u holda teoremani $x\to a$ da nolga intiladigan $\varphi(x)/f(x)$ teskari nisbatga nisbatan qo'llaymiz.

1-misol. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{4x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin 7x)'}{(4x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{7\cos 7x}{4}=\frac{7}{4}.$

2-misol. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=\frac{1}{1}=1.$

Lopital qoidasi $\lim\limits_{x\to\infty}=f(x)=0$ va $\lim\limits_{x\to\infty}=\varphi(x)=0$ bo'lgan holda ham qo'llaniladi.

M i s o l. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}$ ni hisoblang. Bu limit $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi limit, bo'linmaning limiti haqidagi teoremani qo'llasak, yana $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishga ega bo'lamiz. Bunga Lopital qoidasini qo'llaymiz:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}.$$

Biz yana $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmaslikka ega bo'ldik. Lopital qoidasini yana bir marta qo'llaymiz:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0.$$

3) $0\cdot\infty$; $\infty-\infty$; 1^{∞} 0^0; ∞^0 k o ' r i n i s h i d a g i a n i q m a s l i k l a r. Bu ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochish ayniy shakl almashtirishlar yordamida oldingi ikki holga keltiriladi.

1-m i s o l. $\lim\limits_{x\to 0}x^3\cdot e^{1/x^3}$ ni hisoblang. Bunda $\lim\limits_{x\to 0}x^3=0$ va $\lim\limits_{x\to 0}e^{1/x^3}=+\infty$ bo'lganidan $0\cdot\infty$ ko'rinishdagi aniqmaslikka egamiz.

Ayniy shakl almashtirish yordamida $x^3\cdot e^{1/x^3}=\frac{e^{1/x^3}}{\left(\frac{1}{x^3}\right)}$ ko'rinishga kelamiz. Bu esa $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmaslik. Lopital qoidasini qo'llaymiz:

$$\lim_{x\to 0}x^3\cdot e^{1/x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{1/x}}{\left(\frac{1}{x^3}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{1/x})'}{\left(\frac{1}{x^3}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{3}{x^4}\cdot(e^{1/x})^3}{\left(-\frac{3}{x^4}\right)}=\lim_{x\to 0}e^{1/x^3}=+\infty.$$

2-m i s o l. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}x}-\frac{1}{\sin x}\right)$ ni hisoblang. Bu yerda $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\operatorname{tg}x}=\infty$; $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}=\infty$, demak, $\infty-\infty$ ko'rinishdagi aniqmaslik. Ayniy shakl almashtirish yordamida $\frac{1}{\operatorname{tg}x}-\frac{1}{\sin x}=\frac{\cos x-1}{\sin x}$ ko'rinishga o'tamiz. Bu esa $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslik. Bunga Lopital qoidasini qo'llaymiz:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}=0.$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Funksiyaning berilgan nuqtadagi hosilasi ta'rifini bering.
2. Funksiyaning berilgan nuqtadagi hosilasining geometrik ma'nosi nimadan iborat?
3. Hosilaning mexanik ma'nosi nimadan iborat?
4. Funksiya differensiallanuvchanligining zaruriy sharti nimadan iborat?
5. O'zgarmas sonning hosilasi formulasini keltirib chiqaring.
6. Yig'indi, ko'paytma va bo'linmaning hosilasini hisoblash formulalarini keltirib chiqaring.
7. Oshkormas funksiyani differensiallash formulasini keltirib chiqaring.
8. Murakkab funksiyani differensiallash formulasini keltirib chiqaring.
9. Qanday funksiya teskari funksiya deyiladi?
10. Teskari funksiyani differensiallash formulasini keltirib chiqaring.
11. Logarifmik funksiya hosilasi formulasini keltirib chiqaring.
12. Ko'rsatkichli, trigonometrik funksiyalar hosilalari uchun formulalar chiqaring.
13. Teskari trigonometrik funksiyalar hosilalari uchun formulalar chiqaring.
14. Parametrik ko'rinishda berilgan funksiyalarni differensiallash formulasini keltirib chiqaring.
15. Ikkinchi tartibli hosilaning fizik ma'nosi nimadan iborat?
16. Berilgan funksiyaning n-tartibli hosilasi deb nimaga aytiladi?
17. $x\to a$ va $x\to\infty$ da $\frac{0}{0}$ ko'rinishidagi aniqmaslikni ochish uchun Lopital qoidasini chiqaring.
18. $x\to a$ va $x\to\infty$ da $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishidagi aniqmaslikni ochish uchun Lopital qoidasini chiqaring.
19. 1^{∞}; $\infty-\infty$; ∞^{0}; 0^{0} ko'rinishidagi aniqmasliklarni ochishda Lopital qoidasini qo'llanilishini misollar yordamida izohlab bering.

6.4. HOSILANING FUNKSIYANI TEKSHIRISHGA TATBIQI

Funksiyani tekshirishda funksiyaning monotonlik intervallari, ekstremumlari, botiqligi, qavariqligi, asimptotalarini aniqlashga to'g'ri keladi.

6.4.1. FUNKSIYANING MONOTONLIK INTERVALLARI

Funksiyaning o'sishi yoki kamayishi mumkin bo'lgan intervallar *monotonlik intervallari* deyiladi. Berilgan intervallarda funksiya monotonligini hosila yordamida qanday aniqlash masalasini qaraymiz. Dastlab funksiya monotonlik intervalini aniqlashning zaruriy shartini aniqlaymiz.

1-teorema *(zaruriy sharti). Agar $f(x)$ funksiya $(a;\ b)$ intervalda differensiallanuvchi va o'suvchi (kamayuvchi) bo'lsa, u holda ixtiyoriy $x \in (a;\ b)$ uchun*

$$f'(x) \geq 0 \ (f'(x)' \leq 0) \tag{1}$$

o'rinli bo'ladi.

I s b o t. Aytaylik, x_0 nuqta $(a;\ b)$ intervaldagi biror nuqta bo'lsin. $(a;\ b)$ intervalda $f(x)$ funksiya o'suvchi bo'lgan holni qaraylik. U holda $x > x_0$ uchun $f(x) \geq f(x_0)$; $x < x_0$ uchun $f(x) \leq f(x_0)$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bundan esa ixtiyoriy $x \in (a;\ b)$ uchun $\alpha \neq x_0$ da

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \tag{2}$$

tengsizlik o'rinli.

$f(x)$ funksiya $(a;\ b)$ intervalda differensiallanuvchi bo'lgani uchun (2) tengsizlikda $x \to x_0$ ga intilganda limitga o'tsak,

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$$

ga ega bo'lamiz.

Xuddi shunga o'xshash kamayuvchi funksiya uchun ham $f'(x) \leq 0$ ga ega bo'linadi.

Funksiya monotonlik intervalini yetarli shartini aniqlash uchun quyidagi ikki teoremadan foydalaniladi. Bu teoremalarni isbotsiz keltiramiz (isbot qilish talabalarga mustaqil ish shaklida topshiriladi).

2-teorema (Roll teoremasi). *Agar $y = f(x)$ funksiya $[a;\ b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz, $(a;\ b)$ intervalda differensiallanuvchi,* *kesmaning oxirlarida teng $f(a) = f(b)$ qiymatlarni qabul qilsa, u holda kesmaning ichida kamida bitta $x = c \in (a;\ b)$ nuqta topiladiki, unda hosila nolga teng, ya'ni $f'(c) = 0$ bo'ladi.*

Teorema bajarilsa, ya'ni $f'(c) = 0$ bo'lsa, bu $\operatorname{tg} \alpha = 0$ ekanini bildiradi (α – Ox o'qning musbat yo'nalishi bilan $f(x)$ funksiya grafigiga abssissasi $x = c$ ga teng bo'lgan nuqtada o'tkazilgan urinma orasidagi burchak). Shu sababli, teorema sharti bajarilsa, u holda $(a;\ b)$ kesma ichida kam deganda bitta shunday $x = c$ nuqta topiladiki, grafikka abssissasi $x = c$ ga teng nuqtada o'tkazilgan urinma Ox o'qqa parallel bo'ladi.

3-teorema (Lagranjning chekli orttirmalar haqidagi teoremasi). *Agar $y = f(x)$ funksiya $[a;\ b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz, $(a;\ b)$ intervalda differensiallanuvchi bo'lsa, u holda $[a;\ b]$ kesma ichida kamida bitta $x = c \in (a;\ b)$ nuqta topiladiki, bu nuqtada*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \tag{3}$$

tenglik bajariladi.

4-teorema (yetarli sharti). *Agar $f(x)$ funksiya $(a;\ b)$ intervalning har bir nuqtasida musbat (manfiy) hosilaga ega bo'lsa, bu funksiya $(a;\ b)$ intervalda qa'tiy o'sadi (qa'tiy kamayadi).*

Isbot. Aytaylik, x_1 va x_2 lar $(a;\ b)$ intervaldagi ixtiyoriy nuqtalar bo'lsin, bunda $x_1 < x_2$. U holda Lagranj teoremasiga ko'ra $(x_1;\ x_2)$ intervalda shunday $c \in (x_1;\ x_2)$ nuqta topiladiki, bunda

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \tag{4}$$

bo'ladi.

Agar $f'(x) > 0$ bo'lsa, u holda $x_2 > x_1$ uchun (4) formuladan $f(x_2) > f(x_1)$ bo'ladi. Bu esa $(a;\ b)$ intervalda $f(x)$ funksiyani qa'tiy o'suvchanligini ko'rsatadi.

Agar $f'(x) < 0$ bo'lsa, u holda $x_2 > x_1$ uchun (4) formuladan $f(x_2) < f(x_1)$ bo'ladi. Bu $(a;\ b)$ intervalda $f(x)$ funksiyani qa'tiy kamayuchanligini ko'rsatadi.

Bu teoremadan ko'rinadiki, $f(x)$ funksiyaning monotonlik intervallari bir-biridan funksiya hosilasi nolga teng bo'lgan yoki uzilishga duchor bo'lgan nuqtalari bilan ajraladi.

Bu nuqtalar *kritik nuqtalar* deyiladi. Bulardan funksiyaning monotonlik intervallarini topishning quyidagi qoidasi kelib chiqadi:

1) $f(x)$ funksiyaning kritik nuqtalari topiladi. Shu kritik nuqtalar bilan funksiya aniqlanish sohasi hosila ishorasini o'zgartirmaydigan intervallarga bo'linadi;

2) shu intervallarni qaysi birida $f'(x) > 0$ bo'lsa, shu intervalda funksiya qa'tiy o'sadi, qaysi birida $f'(x) < 0$ bo'lsa, funksiya shu intervalda qa'tiy kamayadi.

6.4.2. FUNKSIYANING O'SISHI VA KAMAYISHI

Hosila tushunchasini funksiyaning o'sishi va kamayishini tekshirishga tatbiq etamiz.

1-teorema. 1) *agar [a; b] kesmada hosilaga ega bo'lgan f(x) funksiya shu kesmada o'suvchi bo'lsa, uning hosilasi [a; b] kesmada manfiy bo'lmaydi, ya'ni* $f'(x) \geq 0$.

2) *agar f(x) funksiya [a; b] kesmada uzluksiz, (a; b) oraliqda differensiallanuvchi bo'lsa va* $a < x < b$ *uchun* $f'(x) > 0$ *bo'lsa, bu funksiya [a; b] kesmada o'sadi.*

Isbot. Teoremaning birinchi qismini isbotlaymiz.

$f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada o'sadi, deb faraz qilamiz va x ga Δx orttirma beramiz. So'ngra $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ nisbatni tuzamiz. $f(x)$ o'suvchi funksiya, shunga ko'ra, $\Delta x > 0$ bo'lganda: $f(x + \Delta x) > f(x)$; $\Delta x < 0$ bo'lganda: $f(a + \Delta x) < f(x)$.

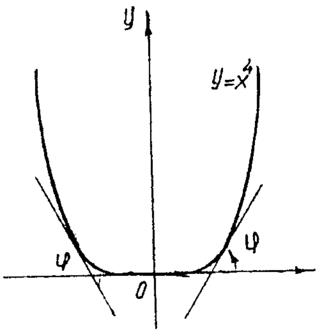
Ikkala holda ham: $\frac{f(a+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} > 0$.

Demak, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0$.

Endi teoremaning ikkinchi qismini isbotlaymiz. $[a; b]$ oraliqda $f'(x) > 0$ deb faraz qilamiz. $[a; b]$ kesmaga tegishli ikkita ixtiyoriy x_1 va x_2 $(x_1 < x_2)$ qiymatini ifodalaymiz. Lagranjning chekli orttirmalar haqidagi teoremasiga ko'ra:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1),$$

$$x_1 < \xi < x_2.$$



109-chizma.

Shartga ko'ra, $f'(\xi) > 0$, demak, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, bu esa $f(x)$ o'suvchi funksiya demakdir. Agar $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada kamaysa, shu kesmada $f'(x) \leq 0$ bo'ladi. Agar $(a; b)$ oraliqda $f'(x) < 0$ bo'lsa, $[a; b]$ kesmada $f(x)$ kamayadi.

M i s o l: $y = x^4$ funksiyaning o'sish va kamayish sohalarini toping.

Y e c h i s h. Hosilani topamiz, $x > 0$ bo'lsa, $y' > 0$ — funksiya o'sadi. $x < 0$ bo'lsa, $y' < 0$ — funksiya kamayadi (109-chizma).

6.4.3. FUNKSIYANING MAKSIMUMI VA MINIMUMI

1-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiyaning x_1 nuqtasidagi qiymati x_1 ni o'z ichiga olgan bironta intervalning hamma nuqtalardagi qiymatlaridan katta bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_1 nuqtada *maksimum* (max) ga ega bo'ladi. Boshqacha aytganda, agar absolut miqdori bo'yicha yetarli darajada kichik bo'lgan har qanday musbat (yoki manfiy) Δx uchun $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya $x = x_1$ nuqtada maksimumga ega bo'ladi.

110-chizmada $y = f(x)$ funksiya $x = x_1$ nuqtada maksimumga ega.

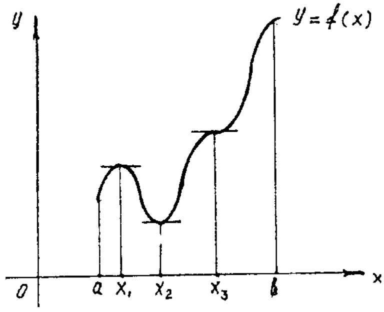
2-ta'rif. *Agar absolut miqdori bo'yicha yetarli darajada kichik bo'lgan har qanday Δx uchun $f(x_2 + \Delta x) < f(x_2)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya $x = x_2$ nuqtada minimum (min)ga ega bo'ladi.*

Masalan, $y = x^4$ funksiya $x = 0$ da minimumga ega. Maksimum va minimum ta'riflari munosabati bilan quyidagi hollarga e'tibor berish kerak:

1) kesmada aniqlangan funksiya x ning faqat qaralayotgan kesmaning ichidagi qiymatlarida maksimal va minimal qiymatlariga yetishi mumkin;

2) funksiyaning maksimumi va minimumini qaralayotgan kesmada uning eng katta va eng kichik qiymatlari deb qarash xato bo'ladi: funksiyaning maksimum va minimumlari funksiyaning *ekstremumlari* (yoki ekstremal qiymatlari) deyiladi.

1-teorema. (Ekstremum mavjudligining zaruriy sharti). *Agar differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiya $x = x_1$ nuqtada maksimumga yoki minimumga ega bo'lsa, uning hosilasi shu nuqtada nolga aylanadi, ya'ni $f'(x_1) = 0$ bo'ladi. Agar $f(x)$ funksiya maksimum va minimum nuqtalarda hosilaga ega bo'lsa, $y = f(x)$ egri chiziqning shu nuqtalarda o'tkazilgan urinmalar Ox o'qiga parallel bo'ladi.*



110-chizma.

Haqiqatan ham, $f'(x_1) = \operatorname{tg}\varphi = 0$ tenglikdan (bu yerda φ urinma bilan Ox o'qi orasidagi burchak) $\varphi = 0$ ekanligi kelib chiqadi.

1-teoremadan bevosita ushbu natija kelib chiqadi: agar argument x ning qaralayotgan hamma qiymatlarida $f(x)$ funksiya hosilaga ega bo'lsa, u holda funksiya x ning faqat hosilani nolga aylantiradigan qiymatlarida ekstremumga ega bo'ladi.

Bunga teskari fikr to'g'ri emas. Hosilani nolga aylantiradigan har qanday qiymatda ham maksimum yoki minimum bo'lavermaydi.

Masalan, $y = x^3$ funksiya $y' = 3x^2$ hosilasi $x = 0$ nuqtada nolga teng, ammo bu nuqtada funksiya maksimumga ham, minimumga ham ega emas (111-chizma).

Funksiya hosilasi mavjud bo'lmagan nuqtalarda ham funksiya ekstremumga ega bo'lishi mumkin.

Agar biror nuqtada hosila mavjud bo'lmasa, shu nuqtada hosila uzilishini ko'ramiz. Argumentning hosila nolga aylanadigan yoki uziladigan qiymatlari *kritik* yoki *kritik qiymatlar* deyiladi.

Har qanday kritik qiymatda funksiya maksimum yoki minimumga ega bo'lavermasligi mumkin. Funksiyaning ekstremumini topish uchun hamma kritik nuqtalar topiladi, so'ngra har bir kritik nuqtani ayrim tekshirib, u nuqtada funksiya maksimum yoki minimumga ega bo'lishi yoki bo'lmasligi aniqlanadi.

2-teorema. (Ekstremum mavjudligining yetarli sharti). *$f(x)$ funksiya kritik nuqta x ni o'z ichiga olgan bironta intervalda uzluksiz va shu intervalning hamma nuqtalarida differensiallanuvchi bo'lsin, agar shu nuqtaning chap tomonidan o'ng tomoniga o'tishda hosilaning ishorasi musbatdan manfiyga o'zgarsa, funksiya $x = x_1$ nuqtada maksimumga ega bo'ladi, ya'ni*

$$\textit{agar} \begin{cases} x < x_1 \ \textit{bo'lganda}, & f'(x) < 0, \\ x > x_1 \ \textit{bo'lganda}, & f'(x) > 0 \end{cases} \quad \textit{bo'lsa, funksiya } x_1 \textit{ nuqtada}$$

maksimimumga ega,

$$\textit{agar} \begin{cases} x < x_1 \ \textit{bo'lganda}, & f'(x) > 0, \\ x > x_1 \ \textit{bo'lganda}, & f'(x) < 0 \end{cases} \quad \textit{bo'lsa, } x_1 \textit{ nuqtada minimumga}$$

ega bo'ladi.

Agar funksiya hosilasi ishorasini o'zgartirmasa u maksimumga ham, minimumga ham ega bo'lmaydi, u o'sadi yoki kamayadi.

6.4.4. DIFFERENSIALLANUVCHI FUNKSIYANI BIRINCHI HOSILA YORDAMIDA EKSTREMUMGA TEKSHIRISH

Differensiallanuvchi $f(x)$ funksiyani ekstremumga tekshirish quyidagi ketma-ketlikda bajariladi:

1. Funksiyaning birinchi tartibli hosilasini, ya'ni $f'(x)$ ni topamiz.
2. Argument x ning kritik qiymatlarini topamiz. Buning uchun:

a) birinchi tartibli hosilani nolga tenglaymiz va haqiqiy ildizlarini topamiz;

b) x ning $f'(x)$ hosila uzilishiga duchor bo'ladigan qiymatlarini topamiz.

3. Hosilaning kritik nuqtadan chapdagi va o'ngdagi ishorasini tekshiramiz. Ikkita kritik nuqta orasidagi intervalda hosilaning ishorasi o'zgarmaydi. Shunga ko'ra, masalan, x_2 kritik nuqtaning chap va o'ng tomonidan hosila ishorasini tekshirish uchun, hosilaning α va β nuqtalardagi ishorasini aniqlash kerak $\begin{pmatrix} x_1 < \alpha < x_2 \\ x_2 < \beta < x_3 \end{pmatrix}$.

4. Argumentning kritik qiymati $x = x_1$ da funksiyaning qiymatini hisoblaymiz.

Kritik nuqta x_1 dan o'tishda $f'(x)$ hosilaning ishorasi			Kritik nuqtaning xarakteri
$x<x_1$	$x=x_1$	$x>x_1$	
$+$	$f'(x_1) = 0$ yoki uziluvchi	$-$	Maksimum nuqtasi
$-$	$f'(x_1) = 0$ yoki uziluvchi	$+$	Minimum nuqtasi
$+$	$f'(x_1) = 0$ yoki uziluvchi	$+$	Funksiya o'sadi
$-$	$f'(x_1) = 0$ yoki uziluvchi	$-$	Funksiya kamayadi

Funksiyaning ekstremumini ikkinchi hosila yordamida tekshirish

$y = f(x)$ funksiyaning hosilasi $x = x_1$ nuqtada nolga aylansin, bundan tashqari $f''(x)$ mavjud va x nuqtaning biror atrofida uzluksiz bo'lsin.

Teorema. *$f'(x_1) = 0$ bo'lsin, u vaqtda $f''(x_1) < 0$ bo'lsa, funksiya x_1 nuqtada maksimumga ega bo'ladi, $f''(x_1) > 0$ bo'lsa, funksiya x_1 nuqtada minimumga ega bo'ladi. Agar kritik nuqtada $f''(x_1) = 0$ bo'lsa, $x = x_1$ nuqtada yo maksimum yoki minimum bo'lishi yoki bo'lmasligi ham mumkin.*

Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari

1. Funksiyaning kesmada hamma maksimum va minimumlari topiladi.

2. Kesmaning boshi va oxirgi nuqtalarida funksiyaning qiymatlari aniqlanadi: $f(a)$, $f(b)$.

3. Funksiyaning yuqorida topilgan hamma qiymatlari orasidagi eng kattasi tanlab olinadi, ana shu qiymat funksiyaning berilgan kesmadagi eng katta qiymati bo'ladi.

6.4.5. EGRI CHIZIQNING QAVARIQLIGI VA BOTIQLIGI

Differensiallanuvchi $f(x)$ funksiya grafigini qaraymiz.

1-ta'rif. Agar $(a; b)$ intervalda egri chiziqning hamma nuqtalari uning har qanday urinmasidan yuqorida bo'lsa, egri chiziq *qavariqligi bilan pastga yo'nalgan*, shu intervalda egri chiziqning hamma nuqtalari uning har qanday urinmasidan pastda bo'lsa, egri chiziq *qavariqligi bilan yuqoriga yo'nalgan* deyiladi (111-chizma).

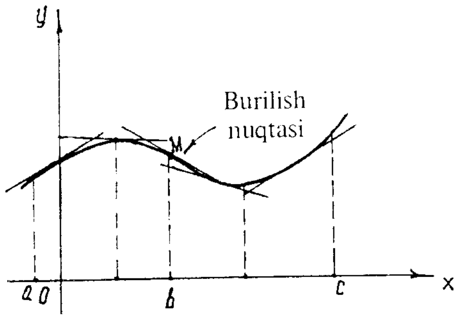
1-teorema. *Agar $(a; b)$ intervalning hamma nuqtalarida $f(x)$ funksiyaning ikkinchi hosilasi manfiy, ya'ni $f''(x)<0$ bo'lsa, shu intervalda $y=f(x)$ egri chiziqning qavariqligi yuqoriga qaragan bo'ladi (egri chiziq qavariq bo'ladi).*

2-teorema. *Agar $(b; c)$ intervalning hamma nuqtalarida $f(x)$ funksiyaning ikkinchi hosilasi musbat, ya'ni $f''(x) > 0$ bo'lsa, shu intervalda $y = f(x)$ egri chiziqning qavariqligi pastga yo'nalgan (botiq) bo'ladi.*

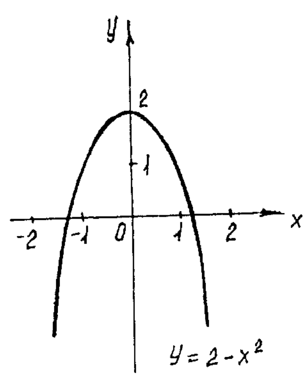
Misol sifatida $y = 2 - x^2$; $y = e^x$ funksiyalarning grafiklarini ko'rish mumkin (112, 113-chizmalar).

2-ta'rif. Uzluksiz egri chiziq qavariq qismini botiq qismidan ajratgan nuqta egri chiziqning *burilish nuqtasi* deb ataladi (111-chizma).

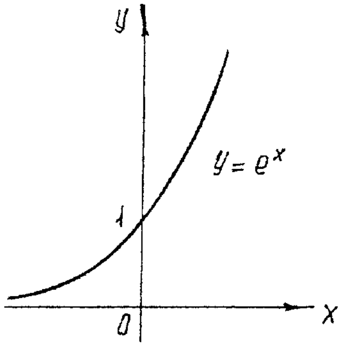
3-teorema. *Egri chiziq $y=f(x)$ tenglama bilan berilgan bo'lsin. Agar $f''(a) = 0$ bo'lsa yoki $f''(x)$ mavjud bo'lmasa va $x = a$ nuqtadan o'tishda $f''(x)$ ning ishorasi o'zgarsa, egri chiziqning abssissasi $x = a$ bo'lgan nuqtasi burilish nuqtasi bo'ladi.*



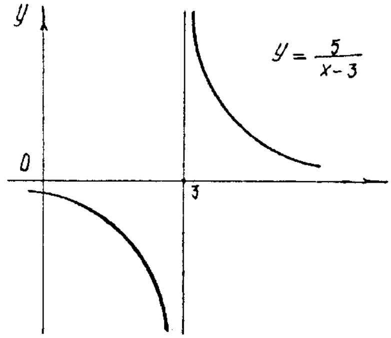
111-chizma.



112-chizma.



113-chizma.



114-chizma.

6.4.6. ASIMPTOTALAR

Ko'pincha $y = f(x)$ egri chiziqning shaklini tekshirishga to'g'ri keladi. Buning uchun esa o'zgaruvchi nuqta abssissasi yoki ordinatasi bir vaqtda cheksiz o'sganda tegishli funksiyaning o'zgarish xarakterini tekshirishga to'g'ri keladi.

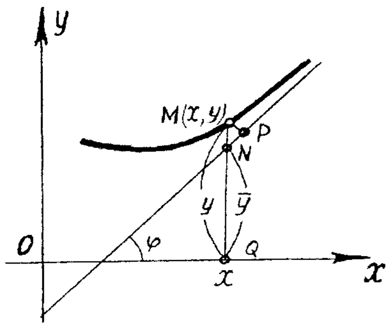
Ta'rif. Agar egri chiziqning nuqtasi cheksiz uzoqlashganda uning biron l to'g'ri chiziqdan masofasi δ nolga intilsa, l to'g'ri chiziq egri chiziqning *asimptotasi* deyiladi. Asimptota grekcha «*asymptotos*» so'zidan olingan bo'lib, bizningcha «ustma-ust tushmovchi» degan ma'noni beradi.

Vertikal (ordinatalar o'qiga parallel) va *og'ma* asimptotalarni bir-biridan farq qilamiz.

Agar $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$ yoki $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$, yoki $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ bo'lsa, u holda $x = a$ to'g'ri chiziq $y = f(x)$ egri chiziqning vertikal asimptotasi deyiladi.

Demak, vertikal asimptotani topish uchun abssissaning shunday $x = a$ qiymatlarini topish kerakki, x shu sonlarga yaqinlashganda $y = f(x)$ funksiya cheksizlikka intilsin. Bu holda $x = a$ to'g'ri chiziq berilgan egri chiziqning vertikal asimptotasi bo'ladi.

M i s o l. $y = \frac{5}{x-3}$ egri chiziq $x = 3$ vertikal asimptotaga ega, chunki $x \to 3$ bo'lganda $y = \infty$ bo'ladi (114-chizma).



115-chizma.

Og'ma asimptotalar

Og'ma asimptota tenglamasi $y = kx + b$ bo'lsin, k va b sonlarni aniqlaymiz. MP — M nuqtadan asimptotagacha bo'lgan masofa, $\lim\limits_{x\to-\infty} MP = 0$; Ox o'qqa og'ish burchagi φ bo'lsa, NMP uchburchakdan: $MN = \dfrac{MP}{\cos\varphi}$. Burchak φ o'zgarmas ($\frac{\pi}{2}$ ga teng bo'lmagan), shuning uchun $\lim NM = 0$ (115-chizma).

$$NM = (QM - QN) = | y - \bar{y} | = | f(x - (kx + b)) |;$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx - b] = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{f'(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0.$$

Birinchi ko'paytuvchi x cheksizlikka intiladi, shuning uchun ushbu tenglik bajarilishi kerak: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{f(x)}{x} - k - \dfrac{b}{x}\right] = 0$; b o'zgarmas bo'lgan holda $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{b}{x} = 0$.

Demak, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{f(x)}{x} - k\right] = 0,\ k = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Kesmada o'suvchi va kamayuvchi funksiya ta'rifini izohlab bering.
2. Funksiyaning o'suvchi va kamayuvchi bo'lishining zaruriy va yetarlilik shartlarini isbotlab bering.
3. Funksiyaning ekstremum nuqtalarini, funksiyaning ekstremal qiymatlarini ta'riflang.
4. Ekstremumning zaruriy va yetarlilik shartlarini isbotlang.
5. $y=f(x)$ funksiya grafigining qavariqlik va botiqlik ta'rifini hamda burilish nuqtalarini ta'riflab bering.
6. $y=f(x)$ funksiya grafigining qavariqlik va botiqlik intervallari va burilish nuqtalari qanday topiladi?
7. Vertikal va og'ma asimptotalarning mavjudlik sharti qanday va ular qanday topiladi?
8. Funksiyani umumiy tekshirish va grafigini yasash sxemasini bayon qiling.

6.5. FUNKSIYANING DIFFERENSIALI. TEYLOR FORMULASI. TENGLAMA ILDIZLARINI TAQRIBIY HISOBLASH

6.5.1. FUNKSIYANING DIFFERENSIALI

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya $[a;\ b]$ kesmada differensiallanuvchi bo'lsin. Shu funksiyaning $[a;\ b]$ kesmaga tegishli biror x nuqtasidagi hosilasi $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ bo'lsin, $\Delta x \to 0$ da nisbat ma'lum songa intiladi. Bundan ko'rinadiki, $\Delta y \to 0$ da nisbat $f'(x)$ hosiladan cheksiz kichik miqdorga farq qiladi, ya'ni $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$; ikkala tomonini Δx ga ko'paytirsak,

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x. \tag{1}$$

Bunda, $f'(x)\Delta x$ ko'paytma Δx ga nisbatan birinchi tartibli cheksiz kichik miqdor, $\alpha \cdot \Delta x$ ko'paytma Δx ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik miqdor, chunki

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0.$$

Demak, Δy orttirma ikki qismdan iborat. Birinchisi — bosh qismi: $[f'(x) \neq 0]\, f'(x) \cdot \Delta x$ ko'paytma funksiyaning *differensiali* deyiladi va u dy bilan belgilanadi:

$$dy = f'(x)\Delta x. \tag{2}$$

Bundan foydalanib, yuqoridagi (1) ifodani quyidagicha yozish mumkin:

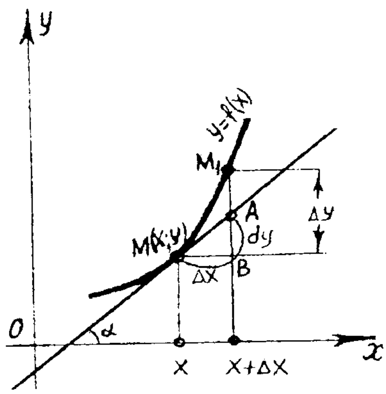
$$\Delta y = dy + \alpha\Delta x. \tag{3}$$

Funksiyaning orttirmasi funksiya differensialidan Δx ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik miqdorga farq qiladi.

Agar $f'(x) \neq 0$ bo'lsa, u holda $\alpha \cdot \Delta x$ ko'paytma Δy ga nisbatan ham yuqori tartibli cheksiz kichik miqdordir.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha\Delta x}{f'(x)\Delta x} = 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha}{f'(x)} = 1. \tag{4}$$

Shuning uchun taqribiy hisoblarda $\Delta y = dy$ deb olinadi.



116-chizma.

1-m i s o l. $y = x^3$ funksiyaning dy differensiali va Δy orttirmasini: 1) x va Δx qiymatlarda; 2) $x = 10$, $\Delta x = 0{,}1$ qiymatlarda toping:

Y e c h i s h. 1) $\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^3\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$,

$dy = (x^3)'\Delta x = 3x^2\Delta x$;

2) agar $x = 10$, $\Delta x = 0{,}1$ bo'lsa,

$\Delta y = 3 \cdot 10^2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 10 \cdot (0{,}1)^2 + (0{,}1)^3 = 30{,}301$,

$dy = 3 \cdot 10^3 \cdot 0{,}1 = 30$.

Δy ni dy ga almashtirganda natija 0,301 ga teng. Hosilaga tegishli teoremalar va formulalar differensiallar uchun ham o'z kuchini saqlaydi.

M i s o l. $y = \operatorname{ctg}^2 x, \quad dy = -2\operatorname{ctg} x \frac{1}{\sin^2 x}\, dx.$

Differensialning geometrik ma'nosi

$y = f(x)$ funksiya va unga mos egri chiziqni qaraylik. Egri chiziqning ixtiyoriy $M(x; y)$ nuqtasini olib, unga shu nuqtada urinma o'tkazaylik, urinmaning Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchagini α bilan belgilaymiz. x ga Δx orttirma beramiz, u holda $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ bo'ladi. 116-chizmada $\Delta y = BA$; A nuqta esa: $A(x + \Delta x; f(x + \Delta x))$ yoki $A(x + \Delta x; y + \Delta y)$; ΔMBA dan: $AB = MB \operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$; $MB = \Delta x$, $BA = f'(x)\Delta x$ bo'lganidan, differensial ta'rifiga asosan $dy = f'(x)\Delta x$. Shunday qilib, $BA = dy$. Bundan ko'rinadiki, $f(x)$ funksiyaning x va Δx ning berilgan qiymatlariga mos keluvchi differensiali $y = f(x)$ egri chiziqqa x nuqtada o'tkazilgan urinmaning ordinatasi orttirmasiga teng ekan.

6.5.2. FUNKSIYANING DIFFERENSIALINI TAQRIBIY HISOBLASHLARGA TATBIQI

Oldingi mavzudagi (3), (4) formulalarga asosan taqribiy hisoblashlarda

$$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x \tag{5}$$

tenglikdan foydalaniladi. (5) formulani quyidagicha yozamiz:

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x. \tag{6}$$

1-m i s o l. $\sqrt{4,325}$ ni hisoblang.

Y e c h i s h. (6) formuladan foydalanamiz:

$$\sqrt{4,325}\approx\sqrt{4}+\frac{1}{2\sqrt{4}}\cdot(4,325-4)=2+\frac{0,325}{4}=2+0,081=2,081.$$

2-m i s o l. $\cos 48^0$ ni hisoblang.

Y e c h i s h . $f(x)=\cos x$ bo'lsin, u holda $f'(x)=-\sin x$. (6) formulaga asosan: $\cos(x+\Delta x)\approx\cos x-\sin x\,\Delta x$; $x=\frac{\pi}{4}$ deb olamiz.

$$\Delta x=3^\circ=\frac{\pi}{180}\cdot 3,\qquad x+\Delta x=\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{180};$$

$$\cos 48^\circ=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{180}\right)\approx\cos\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{180}\cdot\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3\pi}{180}=$$
$$=0,7071+0,7071\cdot 0,052=0,7071+0,037=0,7441.$$

6.5.3. TEYLOR FORMULASI

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtani o'z ichiga olgan biror oraliqda $(n+1)$-tartibgacha hosilalarga ega bo'lsin. Darajasi n dan oshmaydigan shu nuqtadagi qiymatiga teng bo'lgan, n-tartibgacha bo'lgan hosilalarning $x=a$ nuqtadagi qiymatlari $f(x)$ funksiyadan shu nuqtadan olingan mos hosilalar qiymatlariga teng bo'lgan $y=P_n(x)$ ko'phadni olaylik, uning $x=a$ nuqtadagi qiymati $f(x)$ funksiyaning qiymatlariga teng, ya'ni

$$P_n(a)=f(a),\ P'_n(a)=f'(a),\ \ldots,\ P_n^{(n)}(a)=f^{(n)}(a).$$

Bu ko'phadni $(x-a)$ning darajalari bo'yicha noma'lum koeffitsiyentli

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \dots + c_n(x - a)^n \tag{7}$$

ko'phad shaklida izlaymiz. Noma'lum koeffitsiyentlarni yuqoridagi shartlarni qanoatlantiruvchi qilib aniqlaymiz:

$$\left.\begin{array}{l} P_n'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \dots + nc_n(x-a)^{n-1}, \\ P_n''(x) = 2\cdot 1\cdot c_2 + 3\cdot 2c_3(x-a) + \dots + n(n-1)c_n(x-a)^{n-2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_n^{(n)}(x) = \dots(n-1)\dots 2\cdot 1\cdot c_n. \end{array}\right\} \tag{8}$$

$x = a$ qiymatni qo'yamiz:

$$\left.\begin{array}{l} P_n(a) = c_0; \quad P_n'(a) = c_1; \quad P_n''(a) = 2\cdot 1\cdot c_2 \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_n^{(n)}(a) = n(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1\cdot c_n. \end{array}\right\} \tag{9}$$

(9) dan c_1, c_2, ..., c_n koeffitsiyentlarni topamiz:

$$c_0 = f(a), \quad c_1 = f'(a), \quad c_2 = \frac{1}{1\cdot 2} f''(a), \quad c_3 = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(a),$$

$$c_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3 \dots n} f^{(n)}(a) = \frac{1}{n}.$$

U holda

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} f''(a) + \\ &+ \frac{(x-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{1\cdot 2\cdot 3\dots n} f^{(n)}(a). \end{aligned} \tag{10}$$

Berilgan $f(x)$ funksiya bilan tuzilgan $P_n(x)$ ko'phad qiymatlarining ayirmasini $R_n(x)$ orqali belgilaymiz:

$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$, bu yerdan $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ yoki

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{x-a}{1\cdot 1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} f''(a) + \dots + \\ &+ \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x). \end{aligned} \tag{11}$$

(11) formula $f(x)$ funksiya uchun *Teylor formulasi* nomi bilan yuritiladi. $R_n(x)$ Teylor formulasining *qoldiq hadi* deyiladi, u $f(x)$ ni Teylor ko'phadi bilan almashtirganimizda qanday xatoga yo'l qo'yganimizni bildiradi. Qoldiq hadning turli xil shakllari bor. Biz Lagranj shaklini qaraymiz.

Teorema (isbotsiz keltiramiz). *Agar f(x) funksiya x = a nuqtaning atrofida (n+ 1)-tartibgacha hosilalarga ega bo'lsa, u holda bu atrofning har qanday x nuqtasi uchun qoldiq had ushbu ko'rinishga ega bo'ladi:*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

bu yerda ξ ning qiymati a va x orasida yotadi.

Buni (11) ga qo'ysak,

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\ldots \tag{12}$$

ga ega bo'lamiz, bunda $a < \xi < x$. (12) formula *Lagranj shaklidagi R_n qoldiq hadli* Teylor formulasi deb ataladi.

$a = 0$ bo'lsa, *Makloren formulasiga* ega bo'lamiz:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + R_n(x),$$

bunda

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad a < \xi < x. \tag{13}$$

6.5.4. ASOSIY ELEMENTAR FUNKSIYALAR UCHUN TEYLOR FORMULALARI

Lagranj shaklidagi qoldiq hadli Teylor formulasini asosiy elementar funksiyalar: x^α, e^x, $\ln x$, $\sin x$ va $\cos x$ larga tatbiq etamiz.

1) $f(x) = e^x$ funksiyani Makloren formulasi bo'yicha yoyish

e^x funksiya barcha $x \in (-\infty; \infty)$ lar uchun barcha tartibli hosilalarga ega.

Shu hosilalarning $x = 0$ nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$
\begin{aligned}
&f(x) = e^x, \quad f(0) = 1, \\
&f'(x) = e^x, \quad f'(0) = 1, \\
&f''(x) = e^x, \quad f''(0) = 1, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&f^{(n)}(x) = e^x, \quad f^{(n)}(0) = 1, \\
&f^{(n+1)}(x) = e^x, \quad f^{(n+1)}(0) = 1.
\end{aligned}
$$

Topilgan qiymatlarni (13) formulaga qo'yamiz:

$$
e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \dots \qquad (14)
$$

2) $f(x) = \sin x$ funksiyani Makloren formulasi bo'yicha yoyish. $\sin x$ funksiya barcha $x \in (-\infty; \infty)$ lar uchun turli tartibli hosilalarga ega. Shu hosilalarning $x = 0$ nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$
\begin{aligned}
&f(x) = \sin x, \\
&f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \\
&f''(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), \\
&f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right); \\
&f(0) = 0, \\
&f'(0) = 1, \\
&f''(0) = 0, \\
&f'''(0) = -1, \\
&\dots\dots\dots \\
&f^{(n)}(0) = \sin\frac{\pi}{2}; \quad f^{(n+1)}(\xi) = \sin\left(\xi(n+1)\frac{\pi}{2}\right), \quad 0 < \xi < x.
\end{aligned}
$$

Bundan ko'rinadiki, tartibi juft bo'lgan hosilalarning barchasi $x = 0$ da nolga teng. Topilgan qiymatlarni (13) formulaga qo'yamiz:

$$
\begin{aligned}
\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(1n-1)!} + \\
+ \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin\left(\xi + \frac{\pi}{2}(2n+1)\right).
\end{aligned} \qquad (15)
$$

Boshqa funksiyalarni ham yuqoridagiga o‘xshash Makloren formulasi bo‘yicha yoyish mumkin.

6.5.5. TENGLAMALARNING HAQIQIY ILDIZLARINI TAQRIBIY HISOBLASH

Funksiyani tekshirish usullari $y=f(x)$ tenglama ildizlarining taqribiy qiymatlarini topishga imkon beradi.

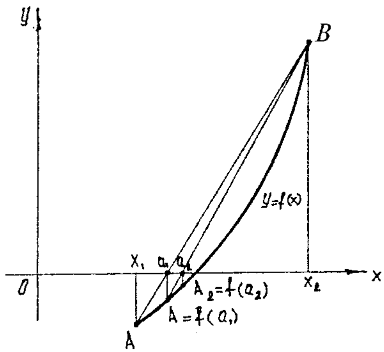
Agar berilgan tenglama birinchi, ikkinchi, uchinchi, to‘rtinchi darajali algebraik tenglama bo‘lsa, u tenglama ildizlarini uning koeffitsiyentlari orqali chekli sondagi qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish, bo‘lish va ildiz chiqarish amallari yordami bilan ifodalashga imkon beruvchi formulalar bor. To‘rtinchidan yuqori darajali tenglamalar uchun bunday formulalar yo‘q. Ammo, agar har qanday algebraik (yoki algebraik bo‘lmagan) transsendent tenglamaning koeffitsiyentlari harflar bilan emas, sonlar bilan berilgan bo‘lsa, u holda tenglamaning ildizlarini istalgan darajada aniqlik bilan taqribiy hisoblash mumkin.

Biz bu mavzuda tenglamaning ildizlarini taqribiy hisoblashning ba’zi usullarini qaraymiz.

Vatarlar usuli

$f(x) = 0$ tenglama berilgan bo‘lib, bu yerda $y=f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz ikki marta differensiallanuvchi bo‘lsin. Funksiyani kesma ichida tekshirib, shunday $[x_1; x_2]$ kesma ajratamizki, bu kesma ichida funksiya monoton (o‘suvchi yoki kamayuvchi) va kesma chetlarida funksiyaning $f(x_1)$ va $f(x_2)$ qiymatlari har xil ishorali bo‘lsin. Aniqlik uchun $f(x_1) < 0$ va $f(x_2) > 0$ deb olaylik. $y=f(x)$ funksiya $[x_1; x_2]$ kesmada uzluksiz bo‘lgani uchun, uning grafigi x_1; x_2 nuqtalar orasidagi bironta nuqtada Ox o‘qini kesadi.

$y=f(x)$ egri chiziqning x_1 va x_2 abssissalariga tegishli chegara nuqtalarini tutashtiruvchi AB vatarning Ox o‘q bilan kesishgan nuqtasining abssissasi ildizning taqribiy qiymati bo‘ladi (117-chizma).



117-chizma.

Bu taqribiy qiymatni topish uchun berilgan ikkita $A(x_1; f(x_1))$ va $B(x_2; f(x_2))$ nuqtadan o‘tuvchi AB to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozamiz: $\frac{y-f(x_1)}{f(x_2)-f(x_1)} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$; $x = a_1$bo‘lganda, $y = 0$ bo‘lgani uchun

$$-\frac{f(x_1)}{f(x_2)-f(x_1)} = \frac{a_1-x_1}{x_2-x_1},$$

bundan

$$a_1 = x_1 - \frac{(x_2-x_1)f(x_1)}{f(x_2)-f(x_1)} \tag{16}$$

yoki

$$a_1 = \frac{x_1 f(x_1) - x_2 f(x_1)}{f(x_2)-f(x_1)}. \tag{17}$$

Ildizning aniqroq qiymatini topish uchun $f(a_1)$ni aniqlaymiz. Agar $f(a_1) < 0$ bo‘lsa, (17) formulani $[a_1; x_2]$ kesmaga qo‘llanib, shu usulni takrorlaymiz, agar $f(a_1) > 0$ bo‘lsa, shu formulani $[x_1; a_1]$ kesmaga qo‘llaymiz. Bu usulni bir necha marta takrorlab, ildizning aniqroq a_1; a_2 va h. k. qiymatlarini topamiz.

Misol. $f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0$ tenglamaning ildizlarini toping.

Yechish. Dastlab monotonlik oraliqlarini topamiz.

$f'(x) = 3x^2 - 6$; $x < -\sqrt{2}$ bo‘lganida hosila musbat, $-\sqrt{2} < x < +\sqrt{2}$ oraliqda manfiy va $x > \sqrt{2}$ bo‘lganida yana musbat.

Shunday qilib, funksiya uchta monotonlik oralig‘iga ega. Hisoblash qulay bo‘lishi uchun monotonlik oralig‘ini kichraytiramiz.

Buning uchun $f(x)$ ifodaga x ning istalgan qiymatlarini qo‘yib har bir monotonlik oralig‘ida chegara nuqtalarida funksiya har xil ishorali bo‘ladigan kichikroq kesmalar ajratamiz:

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = 0 & f(0) = 2 \\ x_2 = 1 & f(1) = -3 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_3 = -3 & f(-3) = -7 \\ x_4 = -2 & f(-2) = 6 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_5 = 2 & f(2) = -2 \\ x_6 = 3 & f(3) = 11 \end{array}\right\}$$

Shunday qilib, ildizlar tubandagi intervallarda bo'ladi: $(-3; -2)$, $(0; 1)$, $(2; 3)$.

$(0; 1)$ intervaldagi taqribiy qiymatni topamiz:

$$a_1 = 0 - \frac{(1-0)\cdot 2}{-3-2} = \frac{2}{5} = 0,4.$$

Endi $f(0,4) = 0,4^3 - 6 \cdot 0,4 + 2 = -0,336$; $f(0) = 2$ bo'lgani uchun ildiz 0 bilan 0,4 oraliqda: $a_1 = 0 - \frac{(1-0)\cdot 2}{-3-2} = \frac{2}{5} = 0,4$; $a_2 = 0 - \frac{(0,4-0)\cdot 2}{-0,336-2} = \frac{0,8}{2,336} = 0,342$ va h. k.

Boshqa intervallardagi taqribiy qiymatlar ham shunday topiladi.

Urinmalar usuli (Nyuton usuli)

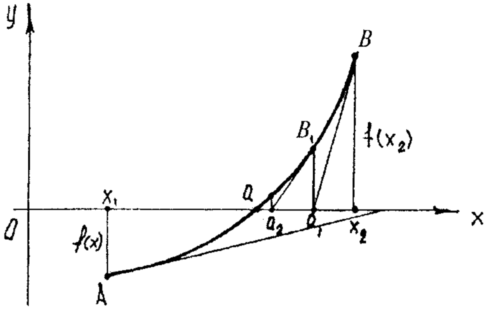
Bu usulda $f(x_1) < 0$, $f(x_2) > 0$ va $[x_1; x_2]$ kesmada birinchi hosilaning ishorasi o'zgarmaydi, deb faraz qilamiz. Bu holda $(x_1; x_2)$ intervalda tenglama bitta ildizga ega bo'ladi.

Endi yana $[x_1; x_2]$ kesmada ikkinchi hosilaning ishorasi o'zgarmaydi, deb faraz qilamiz. Bunga ildizni o'z ichiga olgan interval uzunligini kamaytirish yo'li bilan erishish mumkin. $[x_1; x_2]$ kesmada ikkinchi hosila ishorasining o'zgarmasligi $[x_1; x_2]$ oraliq faqat qavariq yo faqat botiq ekanini ko'rsatadi. Egri chiziqqa B nuqtada urinma o'tkazamiz. Urinmaning Ox o'qi bilan kesishgan nuqtasi a_1 ildizning taqribiy qiymati bo'ladi. Shu abssissaning qiymatini topish uchun B nuqtada urinma tenglamasini yozamiz:

$$y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2).$$

$y = 0$ bo'lganda $x = a_1$ bo'lishini e'tiborga olib,

$$a_1 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \qquad (18)$$



118-chizma.

deb yozamiz. So'ngra bu nuqtadan urinma o'tkazamiz. Shu yo'sinda ildizning aniqroq qiymatini topamiz. Bu usulni bir necha marta takrorlab, ildizning istalgan aniqlikdagi taqribiy qiymatini topamiz (118-chizma).

Yoyning qaysi chegara nuqtasida $f(x)$ funksiya ishorasi bilan uning ikkinchi hosilasining ishorasi bir xil bo'lsa, o'sha nuqtada urinma o'tkazamiz.

M i s o l. $x^3 - 6x + 2 = 0$ tenglamaning (0; 1) intervaldagi ildizini hisoblash uchun (18) formulani qo'llaymiz:

$$f(0) = 0; \qquad f'(0) = (3x^2 - 6)_{x=0} = -6; \qquad f''(x) = 6x \geq 0;$$

$$a_1 = 0 - \frac{2}{-6} = \frac{1}{3} = 0,333.$$

Birlashtirilgan usul

Vatarlar usuli bilan urinmalar usulini $[x_1; x_2]$ kesmada bir vaqtda qo'llanib, izlangan a ildizning ikki tomonida yotgan a_1 va $\bar{a}_1$ nuqtalarni topamiz.

So'ngra $[a_1; \bar{a}_1]$ kesmada yana vatarlar va urinmalar usulini qo'llaymiz. Natijada ildizning qiymatiga yanada yaqinroq ikkita: a_2 va $\bar{a}_2$ sonlarni topamiz.

Topilgan taqribiy qiymatlar orasidagi ayirma talab etilgan aniqlik darajasidan kichik bo'lguncha shu ishni davom ettiramiz.

Yuqoridagi misolda o'rniga qo'yish bilan $f(0,333) > 0$, $f(0,342) < 0$ ekaniga ishonch hosil qilishimiz mumkin. Demak, ildizning qiymati topilgan taqribiy qiymatlar orasida bo'ladi: $0,333 < x < 0,342$.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Funksiya differensiali deb nimaga aytiladi?
2. Funksiyaning differensiali uning hosilasi orqali qanday ifodalanadi?
3. Funksiya differensialining geometrik ma'nosi nimadan iborat?
4. Qanday funksiyalar uchun differensial aynan orttirmaga teng bo'ladi?
5. e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1 + x)$ funksiyalarning Makloren ko'phadi (qatori) ko'rinishidagi taqribiy yoyilmalarini yozing.
6. Funksiyalarning berilgan aniqlikdagi taqribiy qiymatlarini hisoblash uchun Makloren formulasidan qanday foydalaniladi?
7. Tenglama ildizlarini taqribiy hisoblashning vatarlar usulini tushuntirib bering.
8. Tenglama ildizlarini taqribiy hisoblashning urinmalar usulini tushuntirib bering.

7-bob. ANIQMAS INTEGRAL

7.1. ANIQMAS INTEGRAL VA UNING XOSSALARI

7.1.1. BOSHLANG'ICH FUNKSIYA TUSHUNCHASI

Biz $F(x)$ funksiya berilganda uning hosilasini yoki differensiali $f(x)=F'(x)$ ni topishni ko'rdik.

Endi esa teskari masalani qaraymiz. $f(x)$ funksiya berilgan: shunday $F(x)$ funksiyani topish kerakki, uning hosilasi $f(x)$ ga teng bo'lsin, ya'ni $F'(x) = f(x)$ bo'lsin.

1-ta'rif. Agar $[a; b]$ kesmada aniqlangan $f(x)$ funksiya uchun bu kesmaning barcha nuqtalarida $F'(x)=f(x)$ tenglik bajarilsa, $F(x)$ funksiya shu kesmada $f(x)$ funksiyaga nisbatan *boshlang'ich funksiya* deb ataladi.

M i s o l. $f(x)=x^3$ funksiyaga nisbatan boshlang'ich funksiyani toping. Boshlang'ich funksiya ta'rifiga asosan, $F(x)=\frac{x^4}{4}$ boshlang'ich funksiya ekani kelib chiqadi, chunki $\left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3$.

Agar $f(x)$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya mavjud bo'lsa, u boshlang'ich yagona bo'lmasligini ko'rish oson:

$$F(x)=\frac{x^4}{4}+6; \quad F(x)=\frac{x^4}{4}+7, \quad \text{umuman} \quad F(x)=\frac{x^4}{4}+C.$$

Agar $F_1(x)$ va $F_2(x)$ funksiyalar $f(x)$ funksiyaning $[a; b]$ kesmada boshlang'ich funksiyalari bo'lsa, ular orasidagi ayirma o'zgarmas songa teng bo'ladi. Agar berilgan $f(x)$ funksiya uchun qanday bo'lmasin birgina $F(x)$ boshlang'ich funksiya topilgan bo'lsa, $F(x)$ funksiya uchun har qanday boshlang'ich funksiya $F(x)+C$ ko'rinishga ega bo'ladi.

7.1.2. ANIQMAS INTEGRAL VA UNING XOSSALARI

2-ta'rif. Agar $F(x)$ funksiya biror kesmada $f(x)$ funksiya uchun boshlang'ich bo'lsa, $F(x)+C$ ifoda $F(x)$ funksiyadan olingan *aniqmas integral* deb ataladi va ushbu $\int f(x)dx$ ko'rinishda belgilanadi. Ta'rifga ko'ra $F'(x)=f(x)$ bo'lsa, $\int f(x)dx = F(x)+C.$

Bunda $f(x)$ funksiya *integral ostidagi funksiya, f(x)dx — integral ostidagi ifoda*, $\int$ belgi — *integral belgisi* deb ataladi.

Shunday qilib, aniqmas integral $y=F(x)+C$ funksiyalar to'plamidan iborat. Geometrik nuqtayi nazaridan qaraganda, aniqmas integral egri chiziqlar to'plamidan (oilasidan) iborat bo'lib, ularning har biri egri chiziqlardan bittasini o'z-o'ziga parallel holda yuqoriga yoki pastga, ya'ni Oy o'q bo'ylab siljitish yo'li bilan hosil bo'ladi. Har qanday $f(x)$ funksiya uchun ham boshlang'ich funksiya mavjud bo'laveradimi? Tekshirishlar har qanday funksiya uchun ham boshlang'ich funksiya mavjud bo'lavermasligini ko'rsatadi. Agar $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, bu funksiya uchun boshlang'ich funksiya mavjud bo'ladi. Berilgan $f(x)$ funksiya bo'yicha uning boshlang'ich funksiyasini topish $f(x)$ funksiyani *integrallash* deyiladi.

Aniqmas integral quyidagi xossalarga ega:

1. Aniqmas integralning hosilasi integral ostidagi funksiyaga teng, ya'ni $F'(x)=f(x)$ bo'lsa, u holda

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x).$$

2. Aniqmas integralning differensiali integral ostidagi ifodaga teng:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

3. Biror funksiya differensialining aniqmas integrali shu funksiya bilan ixtiyoriy o'zgarmas sonning yig'indisiga teng:

$$\int dF(x) = F(x)+C.$$

4. Biror funksiyaning hosilasidan olingan aniqmas integral shu funksiya bilan ixtiyoriy o'zgarmasning yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int F'(x)dx = F(x)+C.$$

5. Chekli sondagi funksiyalar algebraik yig'indisining aniqmas integrali, shu funksiyalar aniqmas integrallarining algebraik yig'indisiga teng.

$$\int [f_1(x)+f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$$

Haqiqatan ham, bu tenglikning chap va o'ng tomonlarini hosilalarini topsak:

$$\left(\int [f_1(x)+f_2(x)]\,dx\right)' = f_1(x)+f_2(x),$$

$$\left(\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx\right)'=\left(\int f_1(x)dx\right)'+\left(\int f_2(x)dx\right)'=f_1(x)+f_2(x)$$

ga ega bo'lamiz. Demak, tenglikning chap va o'ng tomonlarining hosilalari o'zaro teng, ya'ni chap tomondan turgan har qanday boshlang'ich funksiyaning hosilasi o'ng tomonda turgan har qanday funksiyaning hosilasiga teng.

6. O'zgarmas ko'paytuvchini integral belgisi ostidan chiqarish mumkin, ya'ni a=const bo'lsa, $\int af(x)dx=a\int f(x)dx$.

Buni isbotlash uchun ham ikki tomondan hosila olamiz:

$$\left(\int af(x)dx\right)'=af(x),\quad \left(a\int f(x)dx\right)'=a\left(\int f(x)dx\right)'=af(x).$$

Aniqmas integrallarni hisoblaganda quyidagi qoidalarni nazarda tutish foydali:

1. Agar $\int f(x)dx=F(x)+C$ bo'lsa, $\int f(ax)dx=\frac{1}{a}F(ax)+C$;

$$\left(\int f(ax)dx\right)'=f(ax),$$

$$\left(\frac{1}{a}F(ax)\right)'=\frac{1}{a}(F(ax))'=\frac{1}{a}F'(ax)a,\quad F'(ax)=f(ax).$$

2. Agar $\int f(x)dx=F(x)+C$ bo'lsa, $\int f(x+b)dx=F(x+b)+C$.

3. Agar $\int f(x)dx=F(x)+C$ bo'lsa, $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$.

M i s o l l a r:

1) $\int(5x^4-3\cos x+4\sqrt{x})dx=\int 5x^4dx-\int 3\cos xdx+\int 4\sqrt{x}dx=$

$$=5\frac{x^{4+1}}{4+1}-3\sin x+4\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=x^5-3\sin x+\frac{8}{3}x\sqrt{x}+C;$$

2) $\int\frac{dx}{2x+5}=\frac{1}{2}\ln(2x+5)+C$; 3) $\int\sin 8xdx=-\frac{1}{8}\cos 8x+C$;

4) $\int\cos(3x-5)dx=\frac{1}{3}\sin(3x-5)+C.$

7.1.3. ASOSIY ELEMENTAR FUNKSIYALARNING ANIQMAS INTEGRALLARI JADVALI

Aniqmas integralning ta'rifi, xossalari, shuningdek differensiallashning asosiy formulalaridan foydalanib, eng sodda elementar funksiyalarning integrallari jadvalini tuzamiz:

1) $\int dx = x + C$;

2) $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C(\alpha \neq -1)$;

3) $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$;

5) $\int \frac{dx}{x} = \ln(x) + C$;

6) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$;

7) $\int e^x dx = e^x + C$;

8) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$;

9) $\int \cos x\, dx = \sin x + C$;

10) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

11) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;

12) $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln(\cos x) + C$;

13) $\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln|\sin x| + C$;

14) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$;

15) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$;

16) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$;

17) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$;

18) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$;

19) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.

Yuqoridagi formulalarning to'g'riligi differensiallash yo'li bilan isbotlanadi.

7.2. INTEGRALLASH USULLARI

7.2.1. O'ZGARUVCHILARNI ALMASHTIRISH USULI BILAN YOKI O'RNIGA QO'YISH USULI BILAN INTEGRALLASH

$\int f(x)dx$ ni hisoblash talab qilinsin. Ayrim hollarda x o'zgaruvchini yangi o'zgaruvchiga almashtirish yordamida, ya'ni

$x=\varphi(t)$ deb olib, integral ostidagi ifodani soddalashtirish mumkin, $dx=\varphi'(x)dt,\ \int f(x)dx=\int f[\varphi(t)\varphi'(t)dt.$

Integrallashdan so‘ng t o‘rniga uning x orqali ifodasi qo‘yiladi.

$$\left(\int f(x)dx\right)'_x=f(x).$$

O‘ng tomonini x bo‘yicha murakkab funksiya kabi differensiallaymiz. t oraliq argument, $\frac{dx}{dt}=\varphi'(t)$, teskari funksiya differensialiga asosan:

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\varphi'(t)},$$

$$\left(\int f[\varphi(t)\varphi'(t)dt\right)'_x=\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)'_t\frac{dt}{dx}=$$

$$=f[\varphi(t)]\varphi'(t)\frac{1}{\varphi(t)}=f[\varphi(t)]=f(x).$$

Integrallashda o‘zgaruvchini almashtirish ba’zan $x=\varphi(t)$ ko‘rinishda emas, balki $t=\psi(x)$ ko‘rinishda qulayroq bo‘ladi.

Agar integral $\int\frac{\psi'(x)dx}{\psi(x)}$ ko‘rinishda bo‘lsa, quyidagi ko‘rinishda almashtirish bajaramiz:

$$\psi(x)=t;\ \psi'(x)dx=dt,$$

$$\int\frac{\psi'(t)dx}{\psi(x)}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|\psi(x)|+C.$$

M i s o l. $\int\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$ integralni hisoblang.

Y e c h i s h. $x=\frac{1}{t}$ deb olamiz. U holda $dx=-\frac{1}{t^2}dt,$

$$\int t^2e^t\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=-\int e^tdt=-e^t+C=-e^{\frac{1}{x}}+C.$$

7.2.2. BO‘LAKLAB INTEGRALLASH

Ko‘paytmaning differensiali formulasiga ko‘ra:

$d(uv)=udv+vdu;$ tenglikning ikkala tomonini integrallaymiz: $uv=\int udv+\int vdu,$ bu yerdan:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Bu formula *bo'laklab integrallash* formulasi deb ataladi.

M i s o l. $\int x\cos x dx$ integralni hisoblang.

Y e c h i s h. $u=x$; $du=dx$; $dv=\cos x\, dx$; $v=\sin x$;

$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C.$

$\int x^k \sin ax dx$, $\int x^k \cos ax dx$, $\int x^k e^{ax} dx$, $\int x^k \ln x dx$ kabi va teskari trigonometrik funksiyalar ishtirok qilgan ba'zi integrallar bo'laklab integrallash yordami bilan hisoblanadi.

M i s o l. $\int \mathrm{arctg} x dx$ integralni hisoblang:

$u = \mathrm{arctg} x$; $du = \frac{dx}{1+x^2}$; $dv = dx$; $v = x$;

$\int \mathrm{arctg} x dx = x\,\mathrm{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x\,\mathrm{arctg} x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C.$

7.3. INTEGRALLARNING BA'ZI BIR TIPLARI

7.3.1. SODDA RATSIONAL KASRLARNI INTEGRALLASH

Ta'rif. Quyidagi ko'rinishdagi ratsional kasrlarni *eng sodda ratsional kasrlar* deyiladi.

I. $\frac{A}{x-a}$.

II. $\frac{A}{(x-a)^n}$, bu yerda $n>1$.

III. $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$.

IV. $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^s}$, bu yerda $s>0$.

Bunda A, B, C, a, p, q lar o'zgarmas haqiqiy sonlar, n — natural son, x^2+px+q — kvadrat uchhad (diskriminanti $D>0$).

I, II ko'rinishdagi sodda kasrlarni integrallash juda oson.

I. $\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a|+C.$

II. $\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int (x-a)^{-n}dx = A\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1}+C = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}}+C.$

III. $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$ sodda ratsional kasrning aniqmas integralini hisoblash uchun kasrning maxrajida turgan x^2+px+q kvadrat uchhadni ikkita had kvadratlarining yig'indisi ko'rinishida yozamiz:

$$x^2+px+q = \left(x^2+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4} = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+k^2,$$

$$\left(k^2 = q-\frac{p^2}{4}\right),$$

u holda $\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Bx+C}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+k^2}dx$ ko'rinishda bo'ladi. Endi

o'zgaruvchini almashtiramiz: $x+\frac{p}{2}=t$, bundan $dx=dt$, $x=t-\frac{p}{2}$.

Natijada $\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Bx+C}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+k^2}dx =$

$$= \int \frac{B\left(t-\frac{p}{2}\right)+C}{t^2+k^2}dt = \int \frac{Bt+C-\frac{p}{2}B}{t^2+a^2}dt = B\int \frac{tdt}{t^2+k^2}+\left(C-\frac{p}{2}B\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{B}{2}\int \frac{d(t^2+k^2)}{t^2+k^2}+\left(C-\frac{p}{2}B\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{B}{2}\int \frac{d(t^2+k^2)}{t^2+k^2}+\left(C-\frac{BP}{2}\right)\frac{1}{k}\int \frac{d\left(\frac{t}{k}\right)}{1+\left(\frac{t}{k}\right)^2} =$$

$$= \frac{B}{2}\ln(t^2+k^2)+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{t}{k}+C = \frac{B}{2}\ln(x^2+px+q)+$$

$$+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

IV. $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^s}$ sodda ratsional kasrning integralini hisoblashda kasrning maxrajidagi x^2+px+q kvadrat uchhadni III holdagidek yozib, keyinchalik o'zgaruvchini $x+\frac{p}{2}=t$ ko'rinishda almashtiramiz:

$$\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^s}dx=\int\frac{Bx+C}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right]^s}dx=\int\frac{B\left(t-\frac{p}{2}\right)+C}{(t^2+k^2)^s}dt=$$

$$=B\int\frac{tdt}{(t^2+k^2)^s}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+k^2)^s}=\frac{B}{2}\frac{1}{(1-s)(t^2+k^2)^{s-1}}+$$

$$+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+k^2)^s}.$$

Ikkinchi integralni I_s bilan belgilaymiz: $I_s=\int\frac{tdt}{(t^2+k^2)^s}$.

Maxrajning ildizlari farazga ko'ra kompleks sonlar: $q-\frac{p^2}{4}>0$.

So'nggi integralni tubandagicha almashtiramiz:

$$\int\frac{t^2dt}{(t^2+k^2)^s}=\int\frac{t\cdot t\cdot dt}{(t^2+k^2)^s}=\frac{1}{2}\int t\frac{d\left(t^2+k^2\right)}{(t^2+k^2)^s}=-\frac{1}{2(k-1)}\cdot\int td\frac{1}{(t^2+k^2)^{s-1}}.$$

Bo'laklab integrallaymiz va tubandagini hosil qilamiz:

$$I_s=\int\frac{dt}{(t^2+k^2)^s}=\frac{1}{k^2}\int\frac{(t^2+k^2)-t^2}{(t^2+k^2)^s}dt=\frac{1}{k^2}\int\frac{dt}{(t^2+k^2)^{s-1}}-\frac{1}{k^2}\int\frac{t^2}{(t^2+k^2)^s}dt.$$

Bu ifodani yuqoridagi tenglikka qo'yamiz:

$$I_s=\int\frac{dt}{(t^2+k^2)^s}=\frac{1}{k^2}\int\frac{dt}{(t^2+k^2)^{s-1}}+\frac{1}{k^2}\frac{1}{2(s-1)}\left[t\frac{1}{(t^2+k^2)^{s-1}}-\int\frac{dt}{(t^2+k^2)^{s-1}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2k^2(s-1)(t^2+k^2)^{s-1}}+\frac{2s-3}{2k^2(s-1)}\int\frac{dt}{(t^2+k^2)^{s-1}},$$

o'ng tomonda I_s turidagi integral bor, lekin integral ostidagi funksiya maxrajining daraja ko'rsatkichi uning daraja ko'rsatkichidan bitta birlik past $(s-1)$; I_s ni I_{s-1} orqali ifodaladik. Shu yo'l bilan davom qilib, ma'lum

$I_1=\int\frac{dt}{t^2+k^2}=\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{t}{k}+C$ ga yetib boramiz.

So'ngra t va k larni o'rniga ularning qiymatlarini qo'yib, natijani olamiz.

M i s o l. $\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx$ integralni hisoblang.

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)+(-1-1)}{(x^2+2x+3)^2}dx =$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2}dx - 2\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+2x+3} - 2\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}.$$

Oxirgi integralga $x+1=t$ almashtirishni qo‘llaymiz:

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{dx}{[[x+1]^2+2]^2} = \int \frac{dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{(t^2+2)-t^2}{(t^2+2)^2}dt =$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2} - \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{(t^2+2)^2}dt = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{(t^2+2)^2}dt.$$

Oxirgi integralni qaraymiz:

$$\int \frac{t^2dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{td(t^2+2)}{(t^2+2)} = -\frac{1}{2}\int td\left(\frac{1}{t^2+2}\right) =$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{t^2}{t^2+2} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2} = -\frac{t}{2(t^2+2)} + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}.$$

Demak, $\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\left[-\frac{x+1}{2(x^2+2x+3)} + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right].$

Oxirgi natija:

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx = -\frac{x-1}{4(x^2+2x+3)} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

7.3.2. RATSIONAL FUNKSIYALARNI INTEGRALLASH

Har qanday ratsional funksiyani ratsional kasr sifatida, ya’ni ikki ko‘phadning nisbati ko‘rinishida ifodalash mumkin:

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{B_0x^m + B_1x^{m-1} + ... + B_m}{A_0x^n + A_1x^{n-1} + ... + A_n}.$$

Agar $m>n$ bo‘lsa, kasr to‘g‘ri kasr, aks holda noto‘g‘ri kasr deyiladi. Agar kasr noto‘g‘ri bo‘lsa, suratni maxrajga bo‘lib (ko‘phadni ko‘phadga bo‘lish qoidasiga ko‘ra) berilgan kasrni ko‘phad bilan biror to‘g‘ri kasrning yig‘indisi ko‘rinishida tasvirlash mumkin.

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = M(x) + \frac{F(x)}{Q_n(x)}.$$

1-m i s o l. $\frac{x^5+x-3}{x^3+3x+1}$ noto'g'ri kasr berilgan bo'lsin. Suratni maxrajga bo'lib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\frac{x^5+x-3}{x^3+3x+1} = x^2+3-\frac{x^2-10x}{x^3+3x+2}.$$

Ko'phadlarni integrallash hech qanday qiyinchilik tug'dirmagani uchun, ratsional kasrlarni integrallashdagi asosiy qiyinchilik to'g'ri ratsional kasrlarni integrallashdan iborat.

Endi ratsional kasrlarni eng sodda ratsional kasrlarga ajratishni qaraymiz. $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ to'g'ri ratsional kasrni qaraylik. Bu kasrning maxraji $(x-a)^k$, $(x^2+px+q)^m$ ko'rinishdagi chiziqli va kvadrat ko'paytuvchilarga ajralsin. $(x-a)^k$ ko'rinishdagi ko'paytuvchi k karrali ildizga, $(x^2+px+q)^m$ ko'rinishdagi ko'paytuvchi s-kompleks-qo'shma ildizga mos kelsin, ya'ni

$$Q_n(x)=a_0(x-\alpha_1)^{k_1}\cdot(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x-x_2)^{k_2}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\times$$
$$\times(x^2+p_2x+q_2)^{m_2}\ldots(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\ldots \qquad (*)$$

Teorema. *Har qanday* $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ *ratsional kasrni* $Q_n(x)$ *maxraji* (*) *formula ko'rinishdagi ko'paytuvchilarga ajratilgan bo'lsa, uni I, II, III, IV ko'rinishida ifodalash mumkin.*

Bunda: 1) (*) formulaning $(x-\alpha)$ ko'rinishdagi ko'paytuvchisiga I turdagi bitta $\frac{A}{x-\alpha}$ kasr mos keladi;

2) (*) formulaning $(x-\alpha)^k$ ko'rinishdagi ko'paytuvchisiga I va II turdagi k ta kasr mos keladi: $\frac{A_1}{(x-\alpha)^k}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^{k-1}}+\ldots+\frac{A_n}{(x-\alpha)}$;

3) (*) formulaning $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$; ko'rinishdagi ko'paytuvchisiga III turdagi kasr mos keladi: $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$;

4) (*) formulaning $(x^2+px+q)^m$ ko'rinishdagi ko'paytuvchisiga III va IV turdagi m ta kasr mos keladi:

$$\frac{A_1x+B_1}{(x^2+px+q)^m}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^{m-1}}+\ldots+\frac{A_mx+B_m}{x^2+px+q}.$$

To'g'ri ratsional kasrlarni oddiy kasrlar yig'indisi ifodasidagi A, B, ... koeffitsiyentlarni aniqlashning turli xil usullari bor.

Buni misollarda tushuntiramiz.

1-m i s o l. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+7)}$ integralni hisoblang.

Buning uchun $\frac{1}{(x+1)(x+7)}$ to'g'ri kasrni A va B noma'lum koeffitsientli oddiy kasrlar ko'rinishida yozamiz: $\frac{1}{(x+1)(x+7)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+7}$,

bundan $1=(A + B)x + (7A + B)$ ga ega bo'lamiz. A va B koeffitsiyentlarni topamiz:

$\begin{cases} A+B=0, \\ 7A+B=1 \end{cases}$ sistemani yechamiz va $A=\frac{1}{6}$, $B=-\frac{1}{6}$ ga ega bo'lamiz,

demak,

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x+7)} = \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x+7} = \frac{1}{6}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x+7| + C = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+1}{x+7}\right| + C.$$

3-m i s o l. $\int \frac{3x^3-5x+1}{(x-2)^2(x+2)^2}$ integralni hisoblang.

Y e c h i s h. To'g'ri kasrni sodda kasrlar yig'indisi ko'rinishida yozamiz:

$$\frac{3x^3-5x+1}{(x-2)^2(x+2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2}.$$

Maxrajlardan qutulsak:

$$3x^3 - 5x + 1=A(x + 2)^2(x-2) + B(x + 2)^2 + C(x - 2)^2(x + 2) + D(x-2)^2.$$

Noma'lum koeffitsiyentlarni topish uchun tenglamalar sistemasini tuzamiz:

$x = 2$ da $15=16B$,
$x =-2$ da $-13=16D$,
x^3 da $3 = A + C$,
x^2 da $0=2A + B - 2C + D$.

Bu sistemani yechib, koeffitsiyentlarni topamiz:

$B=\frac{15}{16}$; $D=\frac{13}{16}$; $A=\frac{47}{8}$; $C=-\frac{23}{8}$. Demak,

$$\int \frac{3x^2-5x+1}{(x-2)^2(x+2)^2}dx = \int\left(\frac{\frac{47}{8}}{x-2} + \frac{\frac{15}{16}}{(x-2)^2} + \frac{-\frac{23}{8}}{(x-2)} + \frac{-\frac{13}{16}}{(x-2)^2}\right)dx =$$

$$= \frac{47}{8}\ln|x-2| - \frac{23}{8}\ln|x+2| + \frac{15}{16(x-2)} - \frac{23}{8(x+2)} + C.$$

7.3.3. IRRATSIONAL FUNKSIYALARNING INTEGRALLARI

Irratsional funksiyadan olingan integral hamma vaqt ham elementar funksiyalar orqali ifodalanavermaydi. Irratsional funksiyalarni integrallashda o‘zgaruvchilarni almashtirish yordamida ularni ratsional funksiyalarni integrallashga keltiramiz.

Quyidagi ko‘rinishda integrallarni qaraylik:

1) $\int R\left(x, \sqrt{x}, ... \sqrt[k]{x^s}\right)dx;$

2) $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx.$

Dastlab birinchi integralni qaraylik:

1. $\int R\left(x, \sqrt{x}, ... \sqrt[k]{x^s}\right)dx$, bunda, R — o‘z argumentlariga nisbatan ratsional funksiya bo‘lib, $x, \sqrt{x}, ... \sqrt[k]{x^s}$ miqdorlar orasida ratsional amallar bajarilishini ko‘rsatadi. Bunda $x=t^p$ ko‘rinishdagi almashtirish bajaramiz. $p\,\frac{1}{2}, ..., \frac{s}{k}$ kasrlarning umumiy maxraji $x=t^p$ bo‘lsa, $dz = pt^{p-1}dt$ bo‘ladi.

Misollar keltiramiz.

1-misol. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ integralni hisoblang.

Yechish. x ning ko‘rsatkichlari $\frac{1}{2}$ va $\frac{1}{3}$ bo‘lgani uchun, bu kasrlarning umumiy maxraji 6 ga teng. Shuning uchun $x=t^6$ almashtirish bajaramiz.

U holda $\sqrt{x}=t^3$; $\sqrt[3]{x}=t^2$; $dx = 6t^5dt$ bo‘ladi. U holda:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{6t^5dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3}{1+t}dt.$$

Integral ostidagi kasr noto‘g‘ri kasr bo‘lgani uchun uni

$\frac{t^3}{1+t} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t}$ ko‘rinishga keltiramiz. Demak,

$$6\int\frac{t^3}{1+t}dt=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{1+t}\right)dt=2t^3-3t^2+6t-6\ln|1+t|+C=$$

$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln|1+\sqrt[6]{x}|+C.$$

2-m i s o l. $\int\frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx$ integralni hisoblang.

Y e c h i s h. Integral ostidagi ifoda x va $\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}$ ga nisbatan ratsional funksiya. Shuning uchun $\frac{2-x}{2+x}=t^3$ almashtirish bajaramiz. Bundan:

$x=\frac{2-2t^3}{1+t^3}$; $2-x=\frac{4t^3}{1+t^3}$; $dx=\frac{-12t^2}{(1+t^3)^2}dt.$

Demak,

$$\int\frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx=-\int\frac{2(1+t^3)\cdot t\cdot 12t^2}{16t^5(1+t^3)^2}dt=$$

$$=-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^3}=-\frac{3}{4t^2}+C=\frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}+C.$$

2. $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ ko‘rinishdagi integrallarni hisoblashda Eyler o‘rniga qo‘yishlaridan foydalaniladi. Eyler almashtirishlari tubandagicha:

a) agar $a>0$ bo‘lsa, $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x$;

b) agar $c>0$ bo‘lsa, $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$;

d) agar $b^2-4ac>0$ bo‘lsa, $\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)t$, bu yerda α : ax^2+bx+c tenglamaning bitta ildizi.

M i s o l. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}$ integralni hisoblang.

Y e c h i s h. Maxrajdagi ildiz ostidagi x^2+3x-4 uchhadni ko‘paytuvchilarga ajratamiz: $x^2+3x-4=(x+4)(x-1)$. Eylerning d) o‘rniga qo‘yishidan foydalanamiz:

$\sqrt{x^2+3x-4}=(x+4)t$; $\qquad x^2+3x-4=(x+4)^2t^2$;

$(x-1)(x+4)=(x+4)^2t^2$, $\qquad x-1=(x+4)t^2$.

$$x=\frac{1+4t^2}{1-t^2};\ dx=\frac{10t}{(1-t^2)^2}dt,\qquad \sqrt{x^2+3x-4}=\left[\frac{1+4t^2}{1-t^2}+4\right]t=\frac{5t}{1-t^2}.$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}=\int\frac{10t(1-t^2)}{(1-t^2)^2 5t}dt=\int\frac{dt}{1-t^2}=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}}\right|+C.$$

7.3.4. BA'ZI BIR TRANSSENDENT FUNKSIYALARNING INTEGRALLARI

Aniqmas integralning tatbiqlarida trigonometrik funksiyalardan olingan integrallarni hisoblashga to'g'ri keladi. Shunday integrallarni ko'rib o'tamiz:

1) $\int R(\sin x,\ \cos x)dx$ ko'rinishdagi integral bo'lsa, uni $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$ almashtirish yordamida $R(\sin x,\ \cos x)$ funksiya t ning ratsional funksiyasiga keltiriladi;

2) $\int R(\sin^2 x,\ \cos^2 x)dx$ ko'rinishda bo'lsa, ya'ni $\sin x$ va $\cos x$ funksiyalari o'zining juft ko'rsatkichlari bilan qatnashsa, $t=\mathrm{tg}x$ almashtirish yordamida t ning ratsional funksiyasiga keltiriladi;

3) $\int R(\sin^m x,\cos^n x)dx$ ko'rinishda bo'lsa, m va n ko'rsatkichlardan bittasi toq bo'lsa, $t=\cos x$ yoki $t=\sin x$ almashtirish yordamida t ning ratsional funksiyasiga keltiriladi. Bir necha misollar keltiramiz:

1-misol: $\int\frac{dx}{5+3\sin x}$ integralni hisoblang.

Yechish. $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$ o'rniga qo'yishdan foydalanamiz: $\sin x$ ni almashtiramiz:

$$\sin x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ x=2\mathrm{arctg}t;\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Demak,

$$\int\frac{dx}{5+3\sin x}=2\int\frac{1}{\left(5+3\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=2\int\frac{dt}{\frac{5(1+t^2)+3(1-t^2)}{1+t^2}}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=2\int\frac{1}{8+2t^2}dt=$$

$$=\int\frac{dt}{4+t^2}=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{t}{2}+C.$$

2-misol. $\int\sqrt{1+x^2}dx$ integralni hisoblang.

Y e c h i s h. $x=\mathrm{tg}t$ o‘rniga qo‘yishdan foydalanamiz, u holda

$$\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+\mathrm{tg}^2t}=\frac{1}{\cos t},\quad dx=\frac{dt}{\cos^2 t};$$

$$\int\sqrt{1+x^2}dx=\int\frac{dt}{\cos^3 t}=\int\frac{\cos t}{\cos^4 t}dt=\int\frac{d\sin t}{(1-\sin^2 t)^2}=$$

$$=\int\frac{dy}{(1-y^2)^2}=\int\frac{dy}{(1-y^2)(1+y)^2}.$$

Integral ostidagi $\frac{1}{(1-y^2)(1+y)^2}$ funksiyani sodda kasrlarga ajratamiz: $\frac{1}{(1-y)^2(1+y)^2}=\frac{A}{(1-y)^2}+\frac{B}{1-y}+\frac{C}{(1+y)^2}+\frac{D}{1+y}$; A, B, C, D koeffitsiyentlarni hisoblasak, $A=\frac{1}{4}$; $B=\frac{1}{4}$; $C=\frac{1}{4}$; $D=\frac{1}{4}$ bo‘ladi. Demak,

$$\int\sqrt{1+x^2}dx=\frac{1}{4}\int\frac{dy}{(1-y)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{dy}{1-y}+\frac{1}{4}\int\frac{dy}{(1+y)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{dy}{1+y}=$$

$$=\frac{1}{4}\frac{1}{1-y}-\frac{1}{4(1+y)}-\frac{1}{4}\ln(1-y)+\frac{1}{4}\ln(1+y)+C=$$

$$=\frac{1}{4(1-y)}-\frac{1}{4(1+y)}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right|+C.$$

y o‘zgaruvchidan x o‘zgaruvchiga qaytamiz:

$$\frac{1}{\cos t}=\sqrt{1+\mathrm{tg}^2t}=\sqrt{x^2+1},\quad \sin t=\sqrt{1-\cos^2 t}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|=\ln\left|\frac{(1+\sin t)^2}{1-\sin^2 t}\right|=2\ln\left|\frac{1+\sin t}{\cos t}\right|=2\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|.$$

Oxirgi natija: $\int\sqrt{1+x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+C.$

3-m i s o l. $\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$ integralni hisoblang.

Y e c h i s h. Bu integralni hisoblashda $x=a\sin t$ almashtirish bajaramiz, u holda $dx=a\cos t dt$. Demak,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} = \int \frac{a\cos t dt}{\sqrt{(a^2-a^2\sin^2 t)^3}} = \int \frac{a\cos t dt}{a^3\cos^3 t} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{\cos^2 t} =$$

$$= \frac{1}{a}\operatorname{tg} t + C = \frac{1}{a^2}\frac{\sin t}{\cos t} + C = \frac{1}{a^2}\frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} + C = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} + C.$$

7.3.5. ANIQMAS INTEGRALLARI ELEMENTAR FUNKSIYALAR BILAN IFODALANMAYDIGAN FUNKSIYALAR

Biz oldingi mavzularning birida intervalda uzluksiz bo'lgan har qanday $f(x)$ funksiya bu intervalda boshlang'ich funksiyaga ega bo'lishini, ya'ni $F'(x)=f(x)$ tenglikni qanoatlantiruvchi funksiya mavjud ekanligini aytgandik. Ammo, har qanday boshlang'ich funksiyasi mavjud bo'lgan integrallar ham, elementar funksiyalar bilan chekli ko'rinishda ifodalanavermaydi. Bunga tubandagi integrallar misol bo'ladi:

$$\int e^{-x^2}dx,\ \int \frac{\sin x}{x}dx, \int \frac{\cos x}{x}dx,\ \int \sqrt{1-x^2\sin^2 x}dx,\ \int \frac{dx}{\ln x};$$

$$\int \sin\left(x^2\right)dx; \int \sqrt{1+x^3}dx.$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Boshlang'ich funksiya deb nimaga aytiladi?
2. Berilgan funksiyaning aniqmas integrali deb nimaga aytiladi?
3. Aniqmas integralning xossalarini aytib bering.
4. Aniqmas integralni bo'laklab integrallash formulasini keltirib chiqaring.
5. Aniqmas integralda o'zgaruvchini almashtirish usuli nimadan iborat?
6. I va II turdagi sodda ratsional kasrlar qanday integrallanadi? Misollar keltiring.
7. III turdagi ratsional kasrlar qanday integrallanadi?
8. IV turdagi ratsional kasrlar qanday integrallanadi? Misollar keltiring.
9. Ratsional kasrni eng sodda kasrlarga ajratib integrallash usulini izohlang.
10. $\int R(x, \sqrt{x}, ..., \sqrt[k]{x^s})dx$ ko'rinishdagi integrallarni topish usulini izohlang. Misollar keltiring.
11. $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ ko'rinishdagi integrallarni topish usullarini izohlang. Misollar keltiring.
12. $\int R(\sin x, \cos x)dx$ ko'rinishdagi integrallarni topish usulini ko'rsating. Misollar keltiring.

8-bob. ANIQ INTEGRAL

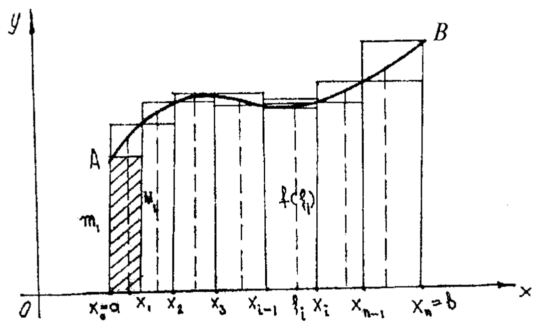
8.1. ANIQ INTEGRAL VA UNING XOSSALARI

Aniq integral matematik tahlil (analiz)ning asosiy tushunchalaridan biri bo'lib, matematika, fizika, mexanika va boshqa fanlarda tekshirishning eng kuchli quroli hisoblanadi.

Egri chiziqlar bilan chegaralangan yuzlarni, egri chiziq yoylari uzunliklarini, hajmlarni, ishlarni, tezliklarni, yo'llarni, inersiya momentlarini va hokazolarni hisoblash ishlarining hammasi aniq integralni hisoblashga keltiriladi.

8.1.1. ANIQ INTEGRAL TUSHUNCHASIGA OLIB KELUVCHI MASALA

$[a;\ b]$ kesmada $y=f(x)$ uzluksiz funksiya berilgan bo'lsin (119-chizma). Berilgan $y=f(x)$ funksiya grafigi, abssissalar o'qi, $x=a$ va $x=b$ vertikal to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan $aABb$ tekis figura *egri chiziqli trapetsiya* deyiladi. Shu egri chiziqli trapetsiya yuzini topamiz. Buning uchun $y=f(x)$ funksiyaning kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini mos ravishda M va m bilan belgilaymiz. $[a;\ b]$ kesmani $x_i=a+\frac{b-a}{n}i,\ i=0,1,\ ...,\ n$ nuqtalar bilan n ta



119-chizma.

kesmachalarga ajratamiz, bunda $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ deb hisoblaymiz va $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, ..., $x_2 - x_1 = \Delta x_0$, $x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$ deb faraz qilamiz, so'ngra $f(x)$ funksiyaning eng kichik va eng katta qiymatlarini

$[x_0; x_1]$ kesmada m_1 va M_1 bilan,

$[x_1; x_2]$ kesmada m_2 va M_2 bilan,

. . . .

$[x_{n-1}; x_n]$ kesmada m_n va M_n bilan belgilaymiz.

Endi quyidagi yig'indilarni tuzamiz:

$$\underline{s_n} = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i,$$

$$\overline{s_n} = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

Bu yig'indilar *integral yig'indilar* deyilib, mos ravishda ichki va tashqi chizilgan zinasimon shaklni siniq chiziq bilan chegaralangan yuziga teng bo'ladi. Bundan esa $\underline{s_n} \le S_{aABb} \le \overline{s_n}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Agar $[a; b]$ kesmalarni yana ham kichiklashtirib bo'laklarga ajratsak, n yetarli darajada katta bo'lganda $\underline{s_n}$ va $\overline{s_n}$ lar bir-biridan kam farq qiladi va egri chiziqli trapetsiyaning yuzini aniqlaydi.

Ta'rif. Aytaylik, $y = f(x)$ $x \in [a; b]$ manfiy bo'lmagan, uzluksiz funksiya bo'lsin. Bu holda, agar $\{\underline{s_n}\}$ va $\{\overline{s_n}\}$ ketma-ketliklar limitlari mavjud bo'lib, bir-biriga teng bo'lsa, limitning qiymati *egri chiziqli trapetsiyaning yuzi* deyiladi.

8.1.2. INTEGRAL YIG'INDI. ANIQ INTEGRALNING TA'RIFI

Endi $[x_0; x_1]$, $[x_1; x_2]$, ..., $[x_{n-1}; x_n]$ kesmalarning har birida bittadan nuqta olamiz. Bu nuqtalarni ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n bilan belgilaymiz. Bu nuqtalarning har birida $f(\xi_1)$, $f(\xi_2)$, ..., $f(\xi_n)$ qiymatlarni hisoblaymiz va $s_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ yig'indini tuzamiz.

Bu yig'indi $[a; b]$ kesmada $f(x)$ funksiyaning *integral yig'indisi* deb ataladi. $[x_{i-1}; x_i]$ kesmaga tegishli bo'lgan har qanday ξ_i nuqta uchun $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$ va barcha $\Delta x_i > 0$ bo'lganda, $m_i\Delta x_i \le f(\xi_i)\Delta x_i \le$ $\le M_i\Delta x_i$ demak, $\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$ yoki $\underline{s_n} \le s_n \le \overline{s_n}$.

Bundan ko'rinadiki, yuzi s_n ga teng bo'lgan shakl ichki va tashqi chizilgan siniq chiziq orasida yotuvchi siniq chiziq bilan chegaralangan, degan ma'noni beradi. s_n yig'indining qiymati $[a; b]$ kesmani $[x_{i-1}; x_i]$ kesmalarga ajratish usuliga hamda hosil qilingan kesmani ichida ξ_i nuqtalarni tanlab olishga bog'liq. Endi $\max[x_{i-1}; x_i]$ bilan kesmalarni eng uzunini belgilaymiz va $\max[x_{i-1}; x_i]$ nolga intiladigan holni qaraymiz. Har bir ajratish uchun ξ_i ning mos qiymatini tanlab, $s_n = \sum\limits_{i=x}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ integral yig'indini tuzamiz.

$n \to \infty$ intilganda $\max \Delta x_i \to 0$ bo'ladigan ketma-ketlikni qaraymiz va u biror limitga ega bo'lsin: $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} s_n = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = s.$

1-ta'rif. Agar $[a; b]$ kesma $\max \Delta x_i \to 0$ shartni qanoatlantiradigan har qanday bo'laklarga ajratilganda va $[x_{i-1}; x_i]$ kesmada ξ_i ni istalgancha tanlab olganda $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ integral yig'indi birgina limitga intilsa, bu limit $[a; b]$ kesmada $f(x)$ funksiyaning *aniq integrali* deb ataladi va $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ bilan belgilanadi. Shunday qilib, ta'rifga ko'ra:

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx,$$

a son integralning *quyi chegarasi*, b son esa integralning *yuqori chegarasi* deyiladi. $[a; b]$ — *integrallash kesmasi*, x esa *integrallash o'zgaruvchisi* deyiladi.

2-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya uchun yuqoridagi limit mavjud bo'lsa, u holda funksiya $[a; b]$ kesmada *integrallanuvchi* funksiya deyiladi.

Agar integral ostidagi $y = f(x)$ funksiyaning grafigini chizsak, $f(x) \geq 0$ bo'lgan holda $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ integralning son qiymati $y = f(x)$ egri chiziq, $x = a$, $x = b$ to'g'ri chiziqlar hamda Ox o'qi bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya yuziga teng.

8.1.3. INTEGRALNING MAVJUDLIGI HAQIDAGI TEOREMA

Teorema. (Teoremani isbotsiz keltiramiz.) *Agar f(x) funksiya [a; b] kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda bu funksiya shu kesmada* *integrallanuvchidir. Uziluvchan funksiyalar orasida integrallanuvchi funksiyalar va integrallanmovchi funksiyalar ham bo'lishi mumkin.*

Eslatma. 1) aniq integral faqat $f(x)$ funksiyaning turiga va integralning chegarasiga bog'liq, ammo har qanday harf bilan belgilanishi mumkin bo'lgan integrallash o'zgaruvchisiga bog'liq emas:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \ldots = \int_a^b f(z)\,dz.$$

2) $\int_a^b f(x)\,dx$ aniq integral tushunchasini berishda $a < b$ deb faraz qildik. Agar $b < a$ bo'lsa, ta'rifga ko'ra:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx, \quad \text{ya'ni} \quad \int_6^0 x^3dx = -\int_0^6 x^3dx.$$

3) agar $a = b$ bo'lsa, ta'riflarga ko'ra, har qanday funksiya uchun tubandagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

8.1.4. ANIQ INTEGRALNING ASOSIY XOSSALARI

$y = f(x)$ funksiya $[a;\, b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. U holda $\int_a^b f(x)\,dx$ mavjud va quyidagi xossalar o'rinli.

1-x o s s a. O'zgarmas ko'paytuvchini aniq integral belgisi tashqarisiga chiqarish mumkin, agar $C = \text{const}$ bo'lsa, u holda

$$\int_a^b Cf(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx.$$

I s b o t.

$$\int_a^b Cf(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^n Cf(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$= C \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = C\int_a^b f(x)dx.$$

2-x o s s a. Bir necha funksiyalar algebraik yig'indisining aniq integrali qo'shiluvchilar aniq integrallarining algebraik yig'indisiga teng:

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)dx\,.$$

I s b o t. Xossani ikkita qo'shiluvchi bo'lgan hol uchun isbotlaymiz.

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f_1(\xi_i) + f_2(\xi_i)]\,\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\max \Delta x \to 0} \left[\sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\Delta x_i \right] =$$

$$= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$= \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$$

Qo'shiluvchilar soni har qancha bo'lganda ham shunday isbot qilinadi.

3-x o s s a (bu xossa $a \geq b$ bo'lgandagina bajariladi). Agar $[a;\, b]$ $(a < b)$ kesmada $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar $f(x) \leq \varphi(x)$ shartni qanoatlantirsa, u holda $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx$ o'rinli.

I s b o t. Tubandagi ayirmani qaraymiz:

$$\int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b [\varphi(x) - f(x)]\,dx =$$

$$= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} [\varphi(\xi_i) - f(\xi_i)]\Delta x_i,$$

bunda: $\varphi(\xi_i) - f(\xi_i) \geq 0$, $\Delta x_i \geq 0$, demak, butun yig'indi manfiy emas va uning limiti ham manfiy emas, ya'ni

$$\int_a^b [\varphi(x) - f(x)]\,dx \geq 0 \quad \text{yoki} \quad \int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

Xossa isbot qilindi.

4-xossa. Agar M va m sonlar $f(x)$ funksiyaning $[a;\ b]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlari bo‘lib, $a \le b$ bo‘lsa, u holda

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \text{ bo‘ladi.}$$

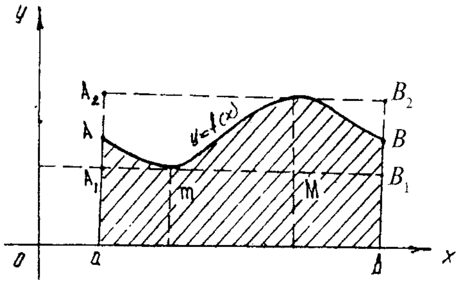
Isbot. Teoremaning shartiga ko‘ra: $m \le f(x) \le M$;

3-xossaga ko‘ra: $\int_a^b mdx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_b^b Mdx$, bunda $\int_a^b mdx$, $\int_a^b Mdx$ ning qiymatlari mos ravishda $\int_a^b mdx = m(b-a)$ va $\int_a^b Mdx = M(b-a)$ ga teng.

Agar $f(x) \ge 0$ bo‘lsa, u holda bu xossani geometrik usulda tasvirlasak, egri chiziqli $aABb$ trapetsiyaning yuzi, aA_1B_1b va aA_2B_2b to‘g‘ri to‘rtburchaklar orasida yotadi (120-chizma).

5-xossa (o‘rta qiymat haqida teorema). Agar $f(x)$ funksiya $[a;\ b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, u holda bu kesmada shunday bir c nuqta topiladiki, bu nuqta uchun $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$ tenglik o‘rinlidir.

Isbot. Aniqlik uchun $a < b$ bo‘lgan holni qaraymiz. Agar m va M lar $f(x)$ ning $[a;\ b]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlari bo‘lsa, u holda oldingi xossaga ko‘ra $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$, bundan $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \mu$, bunda $m \le \mu \le M$; $f(x)$ uzluksiz funksiya bo‘lgani uchun m va M orasidagi hamma oraliq qiymatlarni qabul qiladi.



120-chizma.

Demak, biror c $(a \le c \le b)$ qiymatda $\mu = f(c)$ bo'ladi, ya'ni $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

6-x o s s a. Agar quyidagi uchta integralning har biri mavjud bo'lsa, u holda har qanday uchta a, b, c son uchun

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

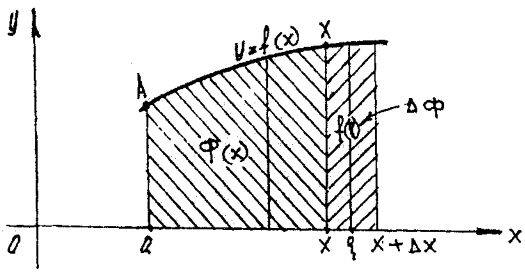
8.1.5. YUQORI CHEGARASI O'ZGARUVCHI BO'LGAN ANIQ INTEGRAL

$\int_a^b f(x)dx$ aniq integralning quyi chegarasi a o'zgarmas, yuqori chegarasi b o'zgaruvchi bo'lsin. U holda integral yuqori chegarasining funksiyasi bo'ladi: $\int_a^x f(t)dt$ ko'rinishdagi integralni hosil qilamiz. a o'zgarmas son bo'lganda bu integral yuqori x chegarasining funksiyasi bo'ladi. Bu funksiyani $\phi(x)$ bilan belgilaymiz:

$$\phi(x) = \int_a^x f(t)dt. \qquad (1)$$

Agar $f(t) \ge 0$ bo'lsa, u holda $\phi(x)$ funksiyaning son qiymati egri chiziqli $aAXx$ trapetsiyaning yuziga teng (121-chizma).

Bu yuz x o'zgarishi bilan o'zgarib boradi. (1) aniq integraldan yuqori chegaraga nisbatan hosila olamiz.



121-chizma.

1-teorema. *Agar f(x) funksiya [a; b] kesmada uzluksiz va* $\phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ *bo'lsa, u holda* $\phi'(x) = f(x)$ *tenglik o'rinli bo'ladi.*

Boshqacha aytganda, aniq integraldan yuqori chegarasi bo'yicha olingan hosila integral ostidagi funksiyaga teng bo'lib, unda integrallash o'zgaruvchisi o'rniga yuqori chegaraning qiymati qo'yiladi.

Isbot. x argumentga musbat yoki manfiy orttirma beramiz, u holda

$$\phi(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

$\phi(x)$ funksiyaning orttirmasi:

$$\Delta\phi = \phi(x+\Delta x) - \phi(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt,$$

$$\text{ya'ni } \Delta\phi = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Oxirgi integralga o'rta qiymat haqidagi teoremani tatbiq etamiz:

$$\Delta\phi = f(\xi)(x+\Delta x - x) = f(\xi)\Delta x,$$

bunda ξ ning qiymati x bilan $x + \Delta x$ orasida yotadi.

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta x} = \frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = f(\xi).$$

Demak, $\phi'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} f(\xi)$, ammo $\Delta x \to 0$ bo'lganda $\xi \to x$ bo'lgani uchun bu holda $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(\xi) = \lim\limits_{\xi\to x} f(\xi)$, lekin $f(x)$ funksiya uzluksiz bo'lgani uchun:

$$\lim_{\xi\to x} f(\xi) = f(x).$$

Shunday qilib, $\phi'(x) = f(x)$, teorema isbotlandi.

Teorema geometrik jihatdan quyidagini ifodalaydi:

$$\Delta\phi = f(\xi)\Delta x$$

orttirma bir asosi Δx bo'lgan egri chiziqli trapetsiyaning yuziga teng bo'lib, $\phi'(x) = f(x)$ hosila x kesmaning uzunligiga teng (121-chizma).

Izoh. Isbot etilgan teoremadan xususiy holda har qanday uzluksiz funksiya boshlang'ich funksiyaga ega, degan natija kelib chiqadi.

Nyuton—Leybnits formulasi

2-teorema. *Agar $f(x)$ funksiya $[a;\ b]$ kesmada uzluksiz va $F(x)$ uzluksiz $f(x)$ funksiyaning biror boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

formula o'rinlidir. Bu formula Nyuton—Leybnits formulasi deyiladi.

I s b o t. $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning biror boshlang'ich funksiyasi bo'lsin, 1-teoremaga muvofiq $\int_a^b f(t)dt$ funksiya ham $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi. Ammo, berilgan funksiyaning har qanday 2 ta boshlang'ich funksiyasi bir-biridan o'zgarmas C^* qo'shiluvchi bilan farq qiladi:

$$\int_a^b f(t)dt = F(x) + C^*.$$

O'zgarmas C^* ni aniqlash uchun $x = a$ deb olamiz.

$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C^*$, $0 = F(a) + C^*$, $C^* = -F(a)$, demak, $\int_a^x f(t)\,dt =$

$= F(x) - F(a)$; $x = b$ deb olsak, Nyuton—Leybnits formulasi hosil bo'ladi:

$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$; t ni x bilan almashtirsak, $\int_a^b f(x)\,dx =$

$= F(b) - F(a)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Integral ostidagi funksiyaning boshlang'ich funksiyasi ma'lum bo'lsa, u holda Nyuton—Leybnits formulasi aniq integralni hisoblash uchun juda qulaydir.

8.2. ANIQ INTEGRALNI HISOBLASH

8.2.1. ANIQ INTEGRALDA O'ZGARUVCHINI ALMASHTIRISH

Aniq integralni hisoblashda ham, aniqmas integralni hisoblashdagidek, o'rniga qo'yish usuli yoki o'zgaruvchini almashtirish usulidan keng foydalaniladi.

Teorema. *f(x) funksiya [a; b] kesmada berilgan va uzluksiz bo'lsin.* $\int_a^b f(x)dx$ *integralni hisoblash talab qilinsin.* $x = \varphi(t)$ *o'zgaruvchini kiritamiz.* $\varphi(t)$ *funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:*

1) $\varphi(t)$ *funksiya* $[\alpha; \beta]$ *kesmada aniqlangan va uzluksiz;*

2) $\varphi(\alpha) = a;\ \varphi(\beta) = b;$

3) $\varphi(t)$ *funksiya* $[\alpha; \beta]$ *kesmada uzluksiz* $\varphi'(t)$ *hosilaga ega. U holda*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \tag{1}$$

bo'ladi.

Isbot. Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, quyidagi tenglikni yozish mumkin:

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \tag{2}$$

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)] + C. \tag{3}$$

Keyingi tenglikning to'g'riligi uning ikki tomonini t bo'yicha differensiallash bilan tekshiriladi. Nyuton—Leybnits formulasiga ko'ra:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Bunga asosan:

$$(3) \Rightarrow \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta =$$

$$= F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$$

ekani kelib chiqadi. Keyingi ifodalarning o‘ng tomonlari teng bo‘lgani uchun chap tomonlari ham teng. Aniq integralni birinchi formula bilan hisoblagandan keyin eski o‘zgaruvchiga o‘tish zaruriyati yo‘q.

M i s o l. $\int\limits_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$ integralni hisoblang.

Y e c h i s h. O‘zgaruvchini almashtiramiz: $x = r\sin t$, $dx = r\cos t dt$, integrallashning yangi chegaralarini topamiz: $x = 0$ bo‘lganda, $t = 0$; $x = r$ bo‘lganda, $t = \frac{\pi}{2}$. Demak,

$$\int\limits_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}\, r\cos t dt =$$

$$= r^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right)dt = r^2\left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^2}{4}.$$

8.2.2. BO‘LAKLAB INTEGRALLASH

Aytaylik, $u = u(x)$ va $v = v(x)$ funksiyalar $[a;\ b]$ kesmada aniqlangan, uzluksiz $u'(x)$ va $v'(x)$ hosilalarga ega bo‘lsin. U holda $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ bo‘ladi.

Bu yerda: $u(x)v(x)$ funksiya $u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi. Nyuton—Leybnits formulasiga asosan, bu ayniyatning ikkala tomonini a dan b gacha chegaralarda integrallaymiz: $\int\limits_a^b (uv)'dx = \int\limits_a^b u'vdx + \int\limits_a^b uv'dx$, bunda $\int (uv)'dx = uv + C$ bo‘lgani sababli, $\int\limits_a^b (uv)'dx = uv\Big|_a^b$ o‘rinli.

Demak, $uv\Big|_a^b = \int\limits_a^b vdu + \int\limits_a^b udv$ yoki $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu.$

Oxirgi tenglik aniq integralni *bo‘laklab integrallash* formulasi deyiladi.

M i s o l. $\int\limits_0^1 xe^{-x}dx$ integralni hisoblang.

Y e c h i s h. Belgilashlar kiritamiz: $u = x$; $dv = e^{-x}dx$, u holda $du = dx$; $v = -e^{x}$. Bo'laklab integrallash formulasiga ko'ra:

$$\int_0^1 xe^{-x}dx = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 = -2e^{-1} + 1 = \frac{e-2}{e}.$$

8.3. ANIQ INTEGRALLARNI TAQRIBIY HISOBLASH

Barcha funksiyalar uchun ham ularning boshlang'ich funksiyasi chekli elementar funksiyalardan iborat bo'lavermaydi. Bunday funksiyalarning aniq integrallarini Nyuton—Leybnits formulasini tatbiq qilib hisoblab bo'lmaydi. Shuning uchun taqribiy hisoblash usullaridan foydalaniladi. Bu usullar aniq integralning integral yig'indi limiti ekanligi ta'rifiga va aniq integralning geometrik ma'nosiga asoslanadi.

8.3.1. TO'G'RI TO'RTBURCHAKLAR FORMULASI

$y = f(x)$ funksiya $[a;\ b]$ kesmada uzluksiz bo'lsin. $\int_a^b f(x)dx$ aniq integralni hisoblash talab qilinadi. $[a;\ b]$ kesmani $a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$ nuqtalar bilan uzunligi Δx bo'lgan n ta bo'laklarga ajratamiz.

So'ngra $f(x)$ funksiyaning $x_0, x_1, \ldots, x_n$ nuqtalardagi qiymatlarini $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n$ orqali belgilaymiz, ya'ni $y_0 = f(x_0)$; $y_1 = f(x_1)$; ...; $y_n = f(x_n)$.

Ushbu yig'indilarni tuzamiz:

$$y_0\Delta x + y_1\Delta x + \ldots + y_{n-1}\Delta x = \sum_{i-0}^{n-1} y_i\Delta x;$$

$$y_1\Delta x + y_2\Delta x + \ldots + y_n\Delta x = \sum_{i=1}^{n} y_i\Delta x.$$

Bu yig'indilarning har biri $f(x)$ uchun $[a;\ b]$ kesmada integral yig'indi. Shuning uchun taqriban integralni ifoda etadi.

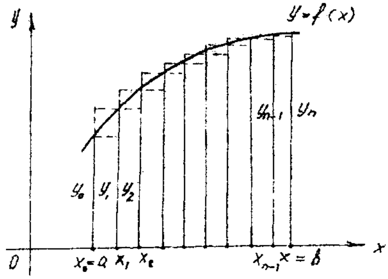
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i. \qquad (1)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i. \qquad (2)$$

Bular *to'g'ri to'rtburchaklar formulasidir.*

(1) formula «ichki» to'g'ri to'rtburchaklardan tuzilgan zinapoyasimon shakl yuzini;

(2) formula «tashqi» to'g'ri to'rtburchaklardan tuzilgan zinapoyasimon shakl yuzini ifodalaydi. Bunda n qancha katta bo'lsa, qilingan xato shuncha kichik bo'ladi (122-chizma).



122-chizma.

8.3.2. TRAPETSIYALAR FORMULASI

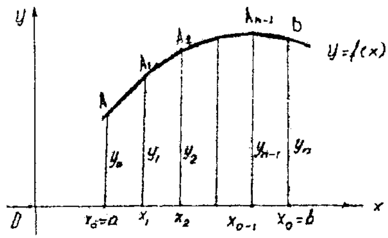
Agar berilgan $y = f(x)$ egri chiziqni to'g'ri to'rtburchaklar formulasida bo'lganidek, zinapoyasimon chiziq bilan almashtirmasdan, balki ichki chizilgan siniq chiziq bilan almashtirsak, u holda aniq integralning ancha aniqroq qiymati chiqadi. Bu holda egri chiziqli *aABb* trapetsiyaning yuzi yuqoridan AA_1; A_1A_2; ...; $A_{n-1}B$ vatarlar bilan chegaralangan to'g'ri chiziqli trapetsiyalar yuzlarining yig'indisiga teng bo'ladi.

Ammo, bu trapetsiyalardan birinchisining yuzi: $\frac{y_0+y_1}{2}\Delta x$, ikkinchisining yuzi: $\frac{y_1+y_2}{2}\Delta x$ va hokazo, shuning uchun

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \left(\frac{y_0+y_1}{2}\Delta x + \frac{y_1+y_2}{2}\Delta x + \ldots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\Delta x\right) \quad \text{yoki}$$

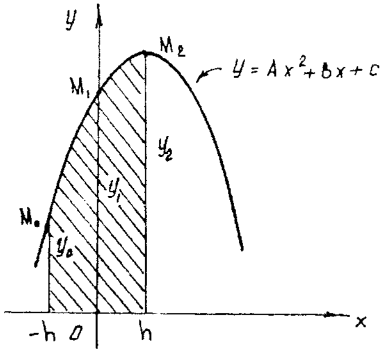
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right),$$

bu esa *trapetsiyalar formulasidir.* n soni ixtiyoriy tanlab olinadi. Bu son qancha katta bo'lsa, ya'ni $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ qadam qancha kichik bo'lsa, taqribiy tenglikning o'ng tomonida yozilgan yig'indi shuncha katta aniqlik bilan integral qiymatini beradi (123-chizma).



123-chizma.

8.3.3. PARABOLALAR FORMULASI (SIMPSON FORMULASI)



124-chizma.

$[a;\ b]$ kesmani juft sonda $n = 2m$ bo'laklarga ajratamiz. $[x_0;\ x_1]$, $[x_1;\ x_2]$ kesmalarga mos va berilgan $y = f(x)$ egri chiziq bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzini $M(x_0;\ y_0)$, $M_1(x_1;\ y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$ uchta nuqtadan o'tuvchi va o'qi Oy o'qqa parallel bo'lgan ikkinchi darajali parabola bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi bilan almashtiramiz. Bunday egri chiziqli trapetsiyani *parabolik trapetsiya* deb ataymiz. O'qi Oy o'qqa parallel bo'lgan parabolaning tenglamasi $y = Ax^2 + Bx + C$ ko'rinishda bo'ladi. A, B, C koeffitsiyentlar parabolaning uchta nuqta orqali o'tishi shartidan aniqlanadi. Shunga o'xshash parabolalarni kesmalarning boshqa juftlari uchun ham yasaymiz. Shunday yasalgan parabolik trapetsiyalar yuzlarining yig'indisi integralning taqribiy qiymatini beradi. Dastlab bitta parabolik trapetsiya yuzini hisoblaymiz (124-chizma).

Lemma. *Agar egri chiziqli trapetsiya $y = Ax^2 + Bx + C$ parabola, Ox o'q va oralig'i $2h$ ga teng bo'lgan ikkita ordinata bilan chegaralangan bo'lsa, u holda uning yuzi $S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$ ga teng bo'ladi. Bunda y_0 va y_2 chetdagi ordinatalar, y_1 esa egri chiziqning kesma o'rtasidagi ordinatasi.*

I s b o t. Yordamchi koordinatalar sistemasini shaklda ko'rsatilganidek joylashtiramiz. Parabolaning $y = Ax^2 + Bx + C$ tenglamasidagi koeffitsiyentlar quyidagi tenglamalardan topiladi:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Agar } x_0 = -h & \text{bo'lsa, u holda} & y_0 = Ah^2 - Bh + C, \\ \text{Agar } x_1 = 0 & \text{bo'lsa, u holda} & y_1 = C, \\ \text{Agar } x_2 = h & \text{bo'lsa, u holda} & y_2 = Ah^2 + Bh + C. \end{array}\right\} \quad (*)$$

A, B, C koeffitsiyentlar ma'lum deb hisoblab, parabolik trapetsiyaning yuzini aniq integral yordami bilan hisoblaymiz:

$$S = \int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)dx = \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx\right]\Bigg|_{-h}^{h} = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C).$$

(*) ifodadan $y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C$ kelib chiqadi, demak, $S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$. Lemmadan foydalanib, quyidagi tenglamalarni yoza olamiz:

$$\int_{a=x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2),$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4),$$

. . . .

$$\int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}=b} f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}).$$

Chap va o'ng tomonlarni qo'shib, chapda izlanayotgan integralni, o'ngda esa uning taqribiy qiymatini hosil qilamiz:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + ... + 2y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}) \text{ yoki}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}[y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2m-2}) +$$
$$+ 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2m-1})].$$

Bu *Simpson formulasi*dir. Bu yerda bo'linish nuqtalarining soni $2m$ ixtiyoriy, lekin bu son qancha katta bo'lsa, integral yig'indining qiymati shuncha aniq bo'ladi.

8.3.4. ANIQ INTEGRALNI TAQRIBIY HISOBLASH FORMULALARIDA QILINGAN XATOLAR

To'g'ri to'rtburchaklar formulasining absolut xatosi $M_1 \cdot \frac{(b-a)^2}{4n}$ dan katta emas, $M_1 - f'(x)$ ning $[a; b]$ kesmadagi eng katta qiymati.

Trapetsiyalar formulasining absolut xatosi $M_2 \cdot \frac{(b-a)^3}{12n^2}$ dan katta emas, $M_2 - [f''(x)]$ ning $[a; b]$ kesmadagi eng katta qiymati.

Simpson formulasining absolut xatosi $M_3 \cdot \frac{(b-a)^5}{2880n^4}$ dan katta emas, $M_3 - [f^{IV}(x)]$ ning $[a; b]$ kesmadagi eng katta qiymati.

M i s o l. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ integralni taqribiy hisoblang.

Y e c h i s h. Avval berilgan integralning aniq qiymatini Nyuton—Leybnits formulasi bo'yicha hisoblaymiz.

$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 = 0,69315.$ [1; 2] kesmani 10 ta teng bo'lakka bo'lib, bu nuqtalarda funksiya qiymatlarini hisoblaymiz.

Tubandagi jadvalni tuzamiz:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
y_i	1,0000	0,9091	0,83333	0,7692	0,71430	0,6667	0,6250	0,5882	0,5556	0,5263	0,5000

a) to'g'ri to'rtburchaklar formulasi bo'yicha:

$$n = 10, \quad \Delta x = \frac{2-1}{10} = 0,1.$$

(1) formulaga ko'ra:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,1(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}) = 0,1 \cdot 7,18723 = 0,71877;$$

(2) formulaga ko'ra:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,1(y_1 + y_2 + \dots + y_n) = 0,1 \cdot 6,68773 = 0,668773.$$

Hosil qilingan natijaning xatosini hisoblaymiz. $f(x) = \frac{1}{x}$ funksiyadan hosila olamiz: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

[1; 2] kesmada $|f'(x) \le 1|$. Shuning uchun $M_1 = 1$. Demak, hosil qilingan natijaning xatosi $\frac{M_1(b-a)^2}{4n} = \frac{1}{4 \cdot 10} = 0,025;$

b) trapetsiyalar formulasi bo'yicha:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,1\left(\frac{1+0,5}{2} + 6,18773\right) = 0,69377.$$

Hosil qilingan natija xatosini hisoblaymiz. Buning uchun $f''(x)$ ni topamiz. [1; 2] kesmada $|f''(x)| \le 2$. Demak, $M_2 = 2$.

Shuning uchun olingan natijaning xatosi:

$$\frac{M_2(b-a)^3}{12n^2} = \frac{2}{12 \cdot 100} = \frac{1}{600} < 0,002;$$

d) Simpson formulasi bo'yicha:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{0{,}1}{3}[y_0 + y_{10} + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9)] =$$

$$= \frac{0{,}1}{3}(1{,}5 + 2 \cdot 2{,}72818 + 4 \cdot 3{,}45955) = 0{,}693146.$$

Hosil qilingan natija xatosini hisoblaymiz. Buning uchun $f^{IV}(x)$ ni hisoblaymiz.

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}; \quad f'''(x) = \frac{6}{x^4}; \quad f^{IV}(x) = \frac{24}{x^5};$$

$[1;\ 2]$ kesmada $|f^{IV}(x)| \le 24$. Demak, $M_3 = 24$.
Shuning uchun hosil qilingan natijaning xatosi

$$\frac{M_3(b-a)^5}{2880 \cdot 10^4} = \frac{24}{2880 \cdot 10000} \approx 0{,}000008$$

kattalikdan ortmaydi.

Aniq va taqribiy, ya'ni 0,69315 va 0,693146 natijalar orasidagi absolut xato 0,000004 ga teng. Bu olingan xatolik bahosidan kichikdir. Yuqoridagi hisoblashlar Simpson formulasi boshqa formulalarga qaraganda ancha aniq ekanligini ko'rsatadi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Aniq integralni taqribiy hisoblash uchun to'g'ri to'rtburchaklar formulasini yozing. Misol keltiring.
2. Aniq integralni taqribiy hisoblash uchun trapetsiyalar formulasini yozing. Misol keltiring.
3. Aniq integralni taqribiy hisoblash uchun Simpson formulasini yozing. Misol keltiring.

8.4. ANIQ INTEGRALNING GEOMETRIYAGA TATBIQI

8.4.1. TEKIS FIGURA YUZINI HISOBLASH

1. To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida yuzlarni hisoblash

Bizga ma'lumki, musbat uzluksiz $y = f(x)$ funksiyadan olingan aniq integral $y = f(x)$ egri chiziq, Ox o'q, $x = a$ va $x = b$ $(a < b)$

to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya yuzini ifodalaydi:

$$S = \int_a^b f(x)dx. \tag{1}$$

Agar $[a;\ b]$ kesmada $f(x) \le 0$ bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx$ aniq integral ham manfiy bo'ladi. Absolut qiymatga ko'ra bu integral tegishli to'g'ri chiziqli trapetsiyaning S yuziga teng:

$$S = -\int_a^b f(x)dx. \tag{2}$$

Agar $f(x)$ funksiya $[a;\ b]$ kesmada ishorasini chekli son marta o'zgartirsa, u holda integralni butun $[a;\ b]$ kesmada qismiy kesmachalar bo'yicha integrallar yig'indisiga ajratamiz. Qayerda $f(x) \ge 0$ bo'lsa, shu kesmada integral musbat, qayerda $f(x) \le 0$ bo'lsa, shu kesmada integral manfiy bo'ladi va yuz (1) va (2) formulalarga ko'ra:

$$S = \int_a^b | f(x) | dx. \tag{3}$$

M i s o l. $0 \le x \le 2\pi$ bo'lganda $y = \sin x$ sinusoida va Ox o'q bilan chegaralangan S yuzni hisoblang (125-chizma.)

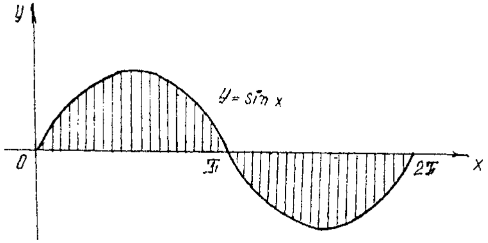
Y e c h i s h. $0 \le x \le \pi$ bo'lganda $\sin x \le 0$, $\pi < x < 2\pi$ bo'lganda esa $\sin x \le 0$ bo'lgani sababli,

$$S = \int_0^\pi \sin xdx + \left|\int_\pi^{2\pi} \sin xdx\right| = \int_0^\pi |\sin x| dx,$$

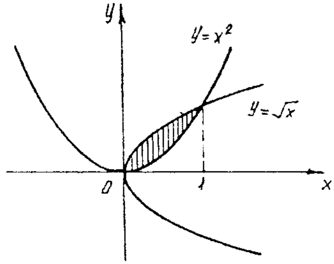
$$\int_0^\pi \sin xdx = -\cos x\Big|_0^\pi = -(\cos\pi - \cos 0) = -1(-1-1) = 2,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin xdx = -\cos x\Big|_0^\pi = -|\cos 2\pi - \cos\pi| = -2.$$

Demak, $S = 2 + |-2| = 4$. Agar murakkabroq, ya'ni egri chiziqli trapetsiyadan murakkabroq tekis figuraning yuzini hisoblash talab qilinsa, uni bir qancha egri chiziqli trapetsiyalar yig'indisi ko'rinishida



125-chizma.



126-chizma.

bo'laklarga ajratamiz. Keyinchalik yuzni ana shu egri chiziqli trapetsiyalar yuzlari yig'indisi ko'rinishida hisoblaymiz:

$$S = \int_a^c f_1(x)dx + \int_c^d f_2(x)dx + \int_d^b f_3(x)dx. \qquad (4)$$

M i s o l. $y = \sqrt{x}$ va $y = x^2$ egri chiziqlar bilan chegaralangan yuzni hisoblang (126-chizma).

Y e c h i s h. Kesishgan nuqtalarni topamiz. Ular $\sqrt{x} = x^2$; $x = x^4$ tenglamalardan topiladi:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 1. \quad \text{Demak,} \quad S = \int_0^1 \sqrt{x}dx - \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

E n d i e g r i c h i z i q t e n g l a m a l a r i p a r a m e t r i k k o ' r i n i s h d a b e r i l g a n b o ' l s i n: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$; $\alpha \le t \le \beta$ va $\varphi(\alpha) = a$; $\varphi(\beta) = b$ egri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya yuzini hisoblaymiz. Yuqoridagi parametrik tenglamalar biror $[a; b]$ kesmada biror $y = f(x)$ funksiyani aniqlaydi, deb faraz qilamiz. U holda egri chiziqli trapetsiyaning yuzi: $S = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b ydx$ ga teng. Bu integralda o'zgaruvchini almashtiramiz. $x = \varphi(t)$; $dx = \varphi'(t)dt$; $y = f(x) = f[\varphi(t)] = \psi(t)$.

Demak,

$$S = \int_a^b \psi(t)\varphi'(t)dt. \qquad (5)$$

(5) — tenglamasi parametrik ko'rinishda berilgan egri chiziq bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzini hisoblash formulasidir.

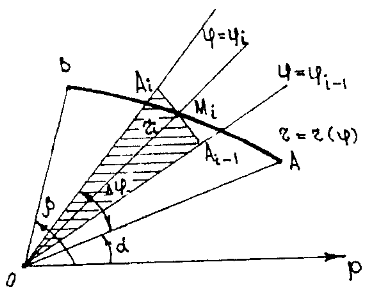
M i s o l. $x = a\cos t$; $y = b\sin t$ ellips bilan chegaralangan sohaning yuzini hisoblang.

Y e c h i s h. x ning qiymati $-a$ dan $+a$ gacha, t ning qiymati π dan 0 gacha o‘zgaradi. Demak,

$$S = 2\int_{\pi}^{0}(b\sin t)(-a\sin t dt) = -2ab\int_{\pi}^{0}\sin^2 t dt = 2ab\int_{0}^{\pi}\sin^2 t dt =$$

$$= 2ab\int_{0}^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt = 2ab\left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right] = \pi ab.$$

2. Qutb koordinatalar sistemasida egri chiziqli sektorning yuzi



127-chizma.

Qutb koordinatalar sistemasida egri chiziq $r = f(\varphi)$ tenglama bilan berilgan bo‘lsin. Bu yerda $f(\varphi)$ funksiya $\alpha \le \varphi \le \beta$ kesmada uzluksiz.

$r = f(\varphi)$ egri chiziq $\varphi = \alpha$ va $\varphi = \beta$ radius-vektorlar bilan chegaralangan egri chiziqli OAB sektor yuzini topamiz. $[\alpha; \beta]$ kesmani $\varphi_i = \alpha + \frac{\beta-\alpha}{n}i$, $(i = 0, 1, 2, ..., n)$ nuqtalar yordamida $[\alpha, \varphi_1]$, $[\varphi_1; \varphi_2]$, ..., $[\varphi_{n-1}; \beta]$ bo‘laklarga bo‘lamiz. O‘tkazilgan radius-vektorlar oralaridagi burchaklarni $\Delta\varphi_1$; $\Delta\varphi_2$; ..., $\Delta\varphi_n$ deb belgilaymiz. φ_{i-1} bilan φ_i orasidagi $\overline{\varphi_i}$ burchakka mos radius-vektor uzunligini $\overline{r_i}$ orqali belgilaymiz. Radiusi $\overline{r_i}$ va markaziy burchagi $\Delta\varphi_i$ bo‘lgan doiraviy sektorni qaraymiz, uning yuzi $\Delta S = \frac{1}{2}\vec{r_i}\Delta\varphi_i$ ga teng (127-chizma). Ushbu $S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} r_i\Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[f(\varphi_i)]^2\Delta\varphi_i$ yig‘indi «zinapoyasimon» sektorning yuzini beradi.

Bu yig‘indi $\alpha \le \varphi \le \beta$ kesmada $r^2 = [f(x)]^2$ funksiyaning integral yig‘indisi bo‘lgani sababli, qiymati $\max\Delta\varphi_i \to 0$ da $\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi$ aniq integralga teng. Bu burchak ichida r_i radius-vektorni qanday olishimizga bog'liq emas. Bu limit shaklning izlangan yuzi uchun qabul qilinishi tabiiydir. Shu OAB sektorning yuzi:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi \quad \text{yoki} \quad S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f\left[(\varphi)\right]^2 d\varphi.$$

M i s o l. $r=a\sqrt{\cos 2\varphi}$ lemniskata bilan chegaralangan yuzni hisoblang.

Y e c h i s h. Agar φ burchak 0 dan $\frac{\pi}{4}$ gacha o'zgarsa, radius-vektor izlanayotgan yuzning choragini chizadi. Bu yuz quyidagiga teng:

$$\frac{1}{4}S=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\varphi=\frac{1}{2}a^2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi d\varphi=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\sin 2\varphi}{2}\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{a^2}{4}.$$

Demak, lemniskata bilan chegaralangan shakl yuzi $S = a^2$ ga teng.

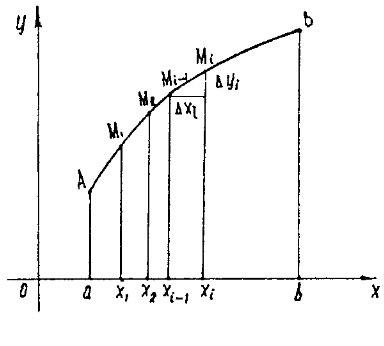
8.4.2. TEKIS EGRI CHIZIQ YOYINING UZUNLIGINI HISOBLASH

Tekislikda to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida egri chiziq $y=f(x)$ tenglama bilan berilgan bo'lsin. Bu funksiya $[a;\ b]$ kesmada uzluksiz va differensiallanuvchi.

Bu egri chiziqning $x = a$ va $x = b$ vertikal to'g'ri chiziqlar orasidagi yoyining uzunligini topamiz. Yoy uzunligi ta'rifini eslatib o'tamiz. Buning uchun $[a;\ b]$ kesmani $x_i=a+\frac{b-a}{n}i$ $(i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ nuqtalar yordamida n ta bo'lakka bo'lamiz.

Bo'linish nuqtalaridan ordinatalar o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz va ularning egri chiziq bilan kesishish nuqtalarini M_i bilan belgilaymiz. M_i nuqtalarni vatarlar bilan tutashtiramiz. U holda AB yoy ichida AM_1, M_1M_2, ... $M_{n-1}B$ siniq chiziq hosil bo'ladi (128-chizma).

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasidan foydalanib, siniq chiziq perimetrini hisoblaymiz:



128-chizma.

$$L = \sqrt{(x - x_0)^2 + (f(x_1) - f(x_0))^2} + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (f(x_2) - f(x_1))^2} +$$
$$+ \ldots + \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2} + \ldots +$$
$$+ \sqrt{(x_n - x_{n-1})^2 + (f(x_n) - f(x_{n-1}))^2}.$$

Bundan AB yoyiga chizilgan siniq chiziq perimetri $L = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2}$ ga teng. Bunda $x_0 = a$; $x_n = b$, Δx_i bo'laklarning eng katta uzunligini $\max\Delta x_i$ deb belgilaymiz.

Ta'rif. AB yoyga ichki chizilgan siniq chiziq perimetri $L = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2}$ $\max \Delta x_i \to 0$ da chekli limitga ega bo'lsa, AB uzunlikka ega deyiladi va bu limit

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} L = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2}$$

$\breve{AB}$ yoyning uzunligi deyiladi.

Biz $f(x)$ funksiya $[a;\ b]$ kesmada uzluksiz va $f'(x)$ hosilaga ega degan edik. Shu sababli, $f(x)$ funksiya har bir $[x_k;\ x_{k+1}]$ oraliqda Lagranj teoremasining shartlarini qanoatlantiradi.

Lagranj teoremasiga ko'ra: $f(x_{k+1}) - f(x_k) = f'(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$, bu yerda $x_k < \xi_k < x_{k+1}$.

Bularga asosan, AB yoyga chizilgan siniq chiziq perimetri quyidagicha aniqlanadi:

$$L = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + f'^2(\xi)(x_{k+1} - x_k)^2} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 \cdot [1 + f'^2(\xi_k)]} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot \Delta x_k;$$

$f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz $f'(x)$ hosilaga ega bo'lganligi sababli, quyidagi $\sqrt{1 + f'^2(x)}$ funksiya ham uzluksiz bo'ladi. Shuning uchun $\sqrt{1 + f'^2(x)}$ funksiyaning $\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot \Delta x_k$ integral yig'indisi $\max \Delta x_i \to 0$ da $\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$ ga intiladi, ya'ni

$$\lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot \Delta x x_k = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

Natijada $\breve{AB} = l$ uzunligi uchun tubandagi formulaga ega bo'lamiz: $l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$

M i s o l. $x^2 + y^2 = r^2$ aylana uzunligini hisoblang.

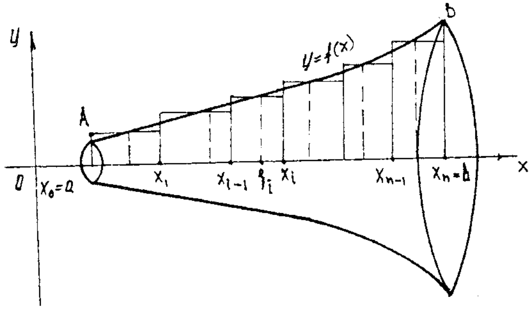
Y e c h i s h . Dastlab aylananing bir chorakda yotgan chizig'ining uzunligini hisoblaymiz. U holda $\breve{AB}$ ning tenglamasi $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ bo'ladi. Demak,

$$\frac{1}{4} l = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = r \arcsin \frac{x}{r} \Big|_0^r = r \frac{\pi}{2} = \frac{\pi r}{2}.$$

Butun aylana uzunligi: $l = 2\pi r.$

8.4.3. AYLANISH JISMINING HAJMINI HISOBLASH

Uzluksiz manfiy bo'lmagan $y = f(x)$, $x \in [a; b]$ funksiya, Ox abssissalar o'qi, $x = a$ va $x = b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan $aABb$ egri chiziqli trapetsiyaning Ox o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jism hajmini aniqlaymiz. Buning uchun $[a; b]$ kesmani $x_i = a + \frac{b-a}{n} i$; $i = 0, 1, 2, ..., n$ nuqtalar yordamida bir xil uzunlik-



129-chizma.

dagi kesmachalarga bo'lamiz. Har bir $[x_{i-1}; x_i]$ kesmachada $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ nuqta tanlaymiz (129-chizma).

Integral yig'indi tuzamiz:

$$\pi f^2(\xi_1)\Delta x_1 + \pi f^2(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + \pi f^2(\xi_n)\Delta x_n = \pi \sum_{i=1}^{n} f^2(\xi_i)\Delta x_i, \quad (1)$$

bu yerda: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; (1) ning har bir qo'shiluvchisi doiraviy silindr hajmiga teng. Butun yig'indi esa zinapoyasimon jismga mos hajmni beradi. Uzluksiz $f(x)$, $x \in [a; b]$ funksiya uchun $n \to \infty$ da (1) integral yig'indi aylanish jismining hajmini beradi:

$$V = \pi \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f^2(\xi_i)\Delta x_i = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

M i s o l. $y = x^3$ egri chiziqning $x = 0$ dan $x = 1$ gacha kesmada abssissalar o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jism hajmini hisoblang.

Y e c h i s h. (*) formulaga ko'ra topamiz:

$$V = \pi \int_0^1 x^6 dx = \pi \frac{x^7}{7}\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{7}.$$

8.4.4. AYLANISH JISMINING SIRTINI HISOBLASH

Oldingi mavzudagi chizmada aylanish jismi berilgan. AB egri chiziqni abssissalar o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt yuzini hisoblash talab qilinsin. $y = f(x)$, $x \in [a; b]$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz va differensiallanuvchi bo'lsin. $[a; b]$ kesmani $x_i = a + \frac{b-a}{n} i$, $i = 0, 1, \dots n$ nuqtalar yordamida n ta bo'lakka bo'lamiz. Bu nuqtalardan ordinatalar o'tkazib, uni egri chiziq bilan kesishgan nuqtalarini M_i bilan belgilaymiz. M_i nuqtalarni vatarlar bilan tutashtirib, $AM_1M_2 \dots M_{n-1}B$ siniq chiziq hosil qilamiz. Bu siniq chiziqning, abssissalar o'qi atrofida aylanishidan kesik konus yon sirtlari hosil bo'ladi. Bu sirtlarning yuzini S_n bilan belgilaymiz. U holda $\{S_n\}$ ketma-ketlikning limiti aylanish jismi sirtining yuzini beradi: $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$; $AM_1M_2 \dots M_{n-1}B$ siniq chiziq aylanishidan hosil bo'ladi, sirt yuzi

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} 2\pi \frac{f(x_i-1)+f(x_i)}{2} l_i = \pi \sum_{i=1}^{n} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \sqrt{1 + (f'(\xi))^2} \Delta x_i \quad (2)$$

yig'indining $n \to \infty$ da limiti esa aylanish jismi sirtining yuzini beradi:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \pi \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \sqrt{1 + (f'(\xi))^2} \Delta x_i =$$

$$= 2\pi \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i)] \sqrt{1 + (f'(\xi))^2} \Delta x_i = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Demak,

$$2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (3)$$

M i s o l. $x^2 + y^2 = R^2$ aylananing abssissalar o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jism sirtining yuzini hisoblang.

Y e c h i s h. $2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ formula bo'yicha hisoblaymiz.

$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ ga teng. To'la sirtni hisoblashda $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ egri chiziqning koordinatalar sistemasining birinchi choragidagi qismining aylanishidan hosil bo'lgan sirt yuzini hisoblab, ikkiga ko'paytiramiz. Ketma-ket quyidagilarni hosil qilamiz:

$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$;

$$\frac{S}{2} = 2\pi\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\,dx = 2\pi\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}}\,dx =$$

$$= 2\pi\int_0^R R\,dx = 2\pi Rx\Big|_0^R = 2\pi R^2. \text{ Demak, } S = 4\pi R^2.$$

8.5. ANIQ INTEGRALNING FIZIKAGA TATBIQI

8.5.1. ISHNI ANIQ INTEGRAL YORDAMIDA HISOBLASH

F kuch ta'siri ostida M moddiy nuqta to'g'ri chiziq bo'yicha harakat qilsin, bunda kuchning yo'nalishi harakat yo'nalishi bilan bir xil bo'lsin. M nuqta $s = a$ holatidan $s = b$ holatga ko'chganda, F kuchning bajargan ishini topish talab qilinsin. Bunda ikki hol bo'lishi mumkin:

1) agar F kuch o'zgarmas bo'lsa, u holda A ish F kuch bilan o'tilgan yo'l uzunligi ko'paytmasiga teng bo'ladi, ya'ni

$$A = F(b - a);$$

2) F kuch moddiy nuqtaning olgan o'rniga qarab uzluksiz o'zgaradi, ya'ni $0 \le s \le b$ kesmada $F(s)$ uzluksiz funksiyani ifodalaydi, deb faraz qilamiz. $[a; b]$ kesmani uzunliklari $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$ bo'lgan n ta ixtiyoriy bo'lakka bo'lamiz. Keyin har bir qismiy kesmada ixtiyoriy ξ_i nuqta tanlab olamiz va $F(s)$ kuchning $\Delta s_i = (i = 1, 2, \ldots, n)$ yo'lda bajargan ishini $F(\xi_i)\Delta s_i$ ko'paytma bilan almashtiramiz.

Bu esa bir qismiy kesmada biror F kuchni o'zgarmas miqdor deb qabul qilishimizni bildiradi. Bunday holda $F(\xi_i)\Delta s_i$ ifoda Δs_i yetarli kichik bo'lganda F kuchning Δs_i yo'lda bajargan ishning taqribiy qiymatini beradi, $A_n = \sum\limits_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta s_i$ yig'indi esa F kuchning butun $[a; b]$ kesmada bajargan ishining taqribiy qiymati bo'ladi.

A_n yig'indi $[a; b]$ kesmada $F = F(s)$ kuch uchun tuzilgan integral yig'indi. Bu yig'indining $\max \Delta s_i \to 0$ dagi limiti mavjud va u $F(s)$ kuchning $s = a$ nuqtadan $s = b$ nuqtagacha bo'lgan yo'lda bajargan ishini ifodalaydi: $A = \int\limits_a^b F(s)ds.$

M i s o l. Vint prujinasining s qisilishi unga ta'sir etuvchi kuchga proporsional. Agar prujinani 1 sm qisish uchun 2 kg kuch kerak bo'lsa, F kuch prujinani 10 sm qisish uchun qancha ish bajarish kerak bo'lishini hisoblang.

Y e c h i s h. Shartga ko'ra F kuch va s siljish $F = ks$ munosabat orqali bog'langan, bunda k o'zgarmas son. s ni metr bilan, F ni kg bilan ifodalaymiz. $s = 0{,}01$; $F = 2$ bo'lganda, $2 = k\ 0{,}01$ bo'ladi. $k = 200$; $F = 200\,s$. Demak,

$$A = \int_0^{0,1} 200\,sds = 200\,\frac{s^2}{2}\Bigg|_0^{0,1} = 1 \text{ kgm}.$$

8.5.2. EGRI CHIZIQ VA TEKIS SHAKLNING STATIK MOMENTLARI

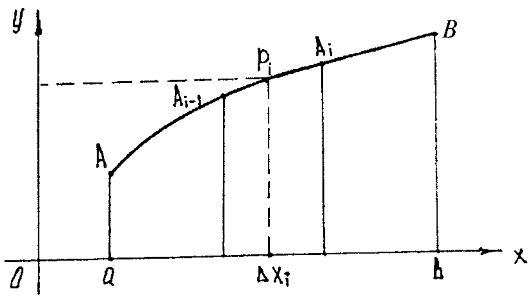
Biror l o'qdan r masofada bo'lgan m massali moddiy nuqtaning l o'qqa nisbatan statik momenti deb $M_l = mr$ miqdorga aytiladi. Tekislikdagi l o'qdan $r_1, r_2, ..., r_n$ masofada bo'lgan mos ravishda $m_1, m_2, ..., m_n$ massali n ta moddiy nuqtalarning l o'qqa nisbatan statik momenti deb

$$M_i = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i \ldots \qquad (1)$$

miqdorga aytiladi. (1) formuladan ko'rinadiki, statik moment additiv miqdor, ya'ni uni qismlarga ajratib yig'indisini hisoblasak ham miqdor o'zgarmaydi. Shu sababli statik momentni hisoblashda aniq integraldan foydalansa bo'ladi.

a) ***egri chiziqning statik momenti***

Aytaylik, AB moddiy egri chiziq xOy tekisligida $y = f(x)(a \le x \le b)$ tenglama bilan berilgan bo'lsin. Egri chiziqning har bir nuqtasidagi chiziqli zichlik $\gamma = \gamma(x)$ ning uzluksiz funksiyasi bo'lsin (130-chizma). Berilgan egri chiziqning Ox o'qqa nisbatan statik momenti M_x ni hisoblash



130-chizma.

uchun uni n ta kichik bo‘lakchalarga bo‘lamiz: $\Delta l_1, \Delta l_2, ..., \Delta l_n$; har bir kichik $\Delta l_i (i = \overline{1,n})$ bo‘lakchada ixtiyoriy $P_i(x_i; y_i)$ nuqta tanlaymiz.

Har bir kichik Δl_i bo‘lakchada zichlikni o‘zgarmas va uning P_i nuqtadagi qiymatiga teng deb, massasi Δm_i bo‘lgan Δl_i bo‘lakcha uchun quyidagi taqribiy ifodani yozamiz: $\Delta m_i \approx \gamma(x_i)\Delta l_i$. U holda AB egri chiziqning massasi m uchun quyidagini hosil qilamiz:

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i)\Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i .$$

Bu tenglikning o‘ng tomonida $\gamma(x) \cdot \sqrt{1 + y'^2(x)}$ funksiya uchun integral yig‘indi turibdi. Shuning uchun $\max \Delta x_i \to 0$ da limitga o‘tib, moddiy AB egri chiziq massasining aniq qiymatini hosil qilamiz:

$$m = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n} \gamma(x_i)\Delta l_i = \int_a^b \gamma(x) dl$$

yoki
$$m = \int_a^b \gamma(x) dl = \int_a^b \gamma(x) \cdot \sqrt{1 + y'^2(x)} dx.$$

Endi egri chiziqning statik momentini topamiz. Har bir Δl_i bo‘lakchani massasi Δm_i bo‘lgan moddiy P_i nuqta bilan almashtiramiz. Bu P_i nuqtaning Ox o‘qiga nisbatan statik momenti Δl_i bo‘lakchalarning statik momentining taqribiy qiymatini beradi: $(M_x)_i \approx y_i \Delta m_i \approx y_i \gamma(x_i) \cdot \Delta l_i$.

AB egri chiziqning M_x statik momenti Δl_i bo‘lakchalarning statik momentlarining yig‘indisiga teng bo‘lgani sababli, M_x uchun quyidagi taqribiy tenglikni yozamiz:

$$M_x \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i) y_i \Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i) y_i \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i .$$

Hosil qilingan tenglikning o‘ng tomonida $\gamma(x) y \cdot \sqrt{1 + y'^2(x)}$ funksiya uchun integral yig‘indi turibdi. $\max \Delta x_i \to 0$ da limitga o‘tsak, egri chiziqning Ox o‘qiga nisbatan statik momentini hosil qilamiz:

$$M_x = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i) y_i \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$$

yoki
$$M_x = \int_a^b \gamma(x) \cdot y \cdot \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Bu formulani qisqacha quyidagicha yozish mumkin:

$$M_x = \int_a^b \gamma(x) y dl, \tag{2}$$

bu yerda: dl AB egri chiziqning tenglamasi: $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + y'^2}\,dx,\ a \le x \le b$; yuqoridagi kabi mulohazalar asosida AB egri chiziqning Oy o'qiga nisbatan statik momenti

$$M_y = \int_a^b \gamma(x) x dl \tag{3}$$

bo'lishini ko'rish qiyin emas. Agar moddiy egri chiziq bir jinsli bo'lsa, uning zichligi o'zgarmas son bo'ladi, ya'ni $\gamma(x) = \gamma$. Shu sababli, statik momentlar uchun (2) va (3) formulalar quyidagi ko'rinishni oladi:

$$M_x = \gamma \int_a^b y dl; \quad M_y = \gamma \int_a^b x dl.$$

b) ***Tekis shaklning statik momenti***

To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida $y = f(x)$ egri chiziq, Ox o'qi va $x = a,\ x = b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya berilgan bo'lsin. Bu tekis shaklning zichligi har bir nuqtada $\gamma(x)$ bo'lsin ($\gamma(x)$ uzluksiz funksiya). Berilgan shaklning Ox o'qiga nisbatan M_x statik momentini topish uchun uni Oy o'qiga parallel chiziqlar bilan n ta kichik $\Delta s_1,\ \Delta s_2,\ \ldots,\ \Delta s_n$ yuzchalarga bo'lamiz (yuzchalarning kengligi mos ravishda $\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \ldots,\ \Delta x_n$).

Har bir Δs_i yuzchaning zichligi o'zgarmas va u berilgan zichlikning $P_i\left(x_i;\ \frac{y_i}{2}\right)$ nuqtadagi qiymatiga teng deb hisoblasak, Δs_i yuzchaning massasi uchun quyidagini hosil qilamiz: $\Delta m_i \approx \gamma(x_i)\Delta s_i$, bunda $\Delta s_i \approx y_i \Delta x_i$. U holda egri chiziqli trapetsiyaning massasi m quyidagicha bo'ladi:

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i)\Delta s_i \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i) y_i \Delta x_i.$$

Bu yerda tenglikning o'ng tomonida $\gamma(x)\ y^2$ funksiya uchun integral yig'indi mavjud. Shuning uchun $\max \Delta x_i \to 0$ da limitga o'tib, egri chiziqli trapetsiyaning aniq qiymatini hosil qilamiz:

$$m = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n} \gamma(x_i)\Delta s_i = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n} \gamma(x_i) y_i \Delta x_i \text{ yoki } m = \int_a^b \gamma(x) y dx.$$

Endi egri chiziqli trapetsiyaning statik momentini hisoblashga o'tamiz. Har bir Δs_i yuzchani massasi Δm_i bo'lgan moddiy $P_i\left(x_i;\ \frac{y_i}{2}\right)$ nuqta bilan almashtiramiz.

Bu nuqtaning Ox o'qiga nisbatan simmetrik statik momenti Δs_i yuzchaning statik momentining taqribiy qiymatini beradi: $(M_x)_i \approx \frac{y_i}{2}\Delta m_i \approx \gamma(x_i)\frac{y_i}{2}\Delta s_i \approx \gamma(x_i)\frac{y_i^2}{2}\Delta x_i$. Egri chiziqli trapetsiyaning M_x statik momenti Δs_i yuzchalarning statik momentlarining yig'indisiga teng bo'lgani uchun, quyidagini hosil qilamiz: $M_x \approx \sum_{i=1}^{n}\gamma(x_i)\cdot\frac{y_i^2}{2}\Delta x_i$. Bu yerda tenglikning o'ng tomonida $\frac{1}{2}\gamma(x)y^2$ funksiya uchun integral yig'indi mavjud. Shuning uchun $\max\Delta x_i \to 0$ da limitga o'tib, egri chiziqli trapetsiyaning Ox o'qiga nisbatan statik momentni hosil qilamiz:

$$M_x = \lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\gamma(x_i)\cdot\frac{y_i^2}{2}\Delta x_i \quad \text{yoki} \quad M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \gamma(x)\cdot y^2. \qquad (4)$$

Yuqoridagi kabi fikr yuritib egri chiziqli trapetsiyaning Oy o'qiga nisbatan statik momentini hisoblash uchun quyidagi $M_y = \int_a^b \gamma(x)x\cdot ydx$ (5) formulani hosil qilish mumkin. Agar egri chiziqli trapetsiya bir jinsli bo'lsa, zichlik $\gamma(x) = \gamma$ o'zgarmas son bo'lsa, (4) va (5) formulalar tubandagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$M_x = \frac{1}{2}\gamma\int_a^b y^2dx \quad \text{va} \quad M_x = \gamma\int_a^b xydx.$$

8.5.3. OG'IRLIK MARKAZINING KOORDINATALARI

To'g'ri burchakli xOy koordinatalar tekisligida massalari m_1, m_2, ..., m_n bo'lgan $P_1(x_1;\ y_1)$; $P_2(x_2;\ y_2)$; ...; $P_n(x_n;\ y_n)$ moddiy nuqtalar sistemasi berilgan bo'lsin. x_c va y_c orqali berilgan sistemaning og'irlik markazi koordinatalarini belgilaymiz. $x_i m_i$; $y_i m_i$ ko'paytmalar m_i massaning Ox va Oy o'qlarga nisbatan olingan statik momentlari deyiladi. Bu holda moddiy sistema markazining koordinatalari

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad (1), \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad (2)$$

formulalar bilan aniqlanishi mexanikadan ma'lum. Bu formuladan turli shakl va jismlarning og'irlik markazlarini topishda foydalanamiz.

a) tekislikdagi chiziqning og'irlik markazi

AB egri chiziq $y = f(x)$ tenglama bilan berilgan ($a \le x \le b$) va bu egri chiziq moddiy chiziq bo'lsin. Bu moddiy egri chiziqning chiziqli zichligi γ deb faraz qilamiz. Chiziqni uzunliklari $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$ bo'lgan n ta bo'lakka bo'lamiz. Bu bo'laklarning massalari ularning uzunliklari bilan zichlik ko'paytmasiga teng: $\Delta m_i = \gamma \Delta s_i$; Δs_i yoyning har bir bo'lagida abssissasi ξ_i bo'lgan ixtiyoriy nuqta olamiz. Endi Δs_i yoyning har bir bo'lagini massasi $\gamma \Delta s_i$ bo'lgan $P_i[\xi_i; f(\xi_i)]$ moddiy nuqta deb qarab, (1) va (2) formulada x_i o'rniga ξ_i qiymatni, y_i o'rniga $f(\xi_i)$ qiymatni, m_i o'rniga (Δs bo'laklar massasi) $\gamma \Delta s_i$ qiymatni qo'ysak, yoyning og'irlik markazini aniqlash uchun taqribiy formulalar hosil qilamiz:

$$x_c \approx \frac{\sum \xi_i \gamma \ \Delta s_i}{\sum \gamma \ \Delta s_i}; \qquad y_c \approx \frac{\sum f(\xi_i) \gamma \ \Delta s_i}{\sum \gamma \ \Delta s_i}.$$

Agar $y = f(x)$ uzluksiz funksiya bo'lsa va uzluksiz hosilaga ega bo'lsa, u holda har bir kasrning suratidagi va maxrajidagi yig'indilar max $\Delta s_i \to 0$ da mos integral yig'indilarining limitiga teng bo'lgan limitlarga ega bo'ladi. Yoy og'irlik markazining koordinatalari aniq integrallar bilan ifodalanadi:

$$x_c = \frac{\int_a^b x ds}{\int_a^b ds} = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+f'^2(x)}dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}dx};$$

$$y_c = \frac{\int_a^b f(x) ds}{\int_a^b ds} = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}dx}.$$

1-misol. Ox o'qning yuqorisiga joylashgan $x^2 + y^2 = R^2$ ($-R \le x \le R$) yarim aylana og'irlik markazining koordinatalarini toping.

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}; \quad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx;$$

$$y_c = \frac{\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}} dx}{\pi a} = \frac{R\int_{-R}^{R} dx}{\pi a} = \frac{2R^2}{\pi R} = \frac{2R}{\pi}.$$

Yarim aylana Ox o'qiga nisbatan simmetrik bo'lgani uchun $x_c = 0$.

b) t e k i s s h a k l n i n g o g' i r l i k m a r k a z i

Berilgan shakl $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$ chiziqlar bilan chegaralangan bo'lib, moddiy tekis shakldan iborat bo'lsin, sirt zichligi, ya'ni sirt birlik yuzining massasi shaklning hamma bo'laklari uchun o'zgarmas va δ ga teng deb hisoblaymiz.

Berilgan shaklni $x = x_i = a + \frac{b-a}{n} i$ $(i = 0, 1, ..., n)$ to'g'ri chiziqlar bilan kengligi $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ bo'lgan polosalarga ajratamiz.

Har bir polosa massasi polosa yuzi bilan zichlik ko'paytmasiga teng bo'ladi. Agar har bir polosani asosi Δx_i va balandligi $f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)$ bo'lgan (bunda $\xi_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$) to'g'ri to'rtburchak bilan almashtirsak, u holda polosaning massasi taqriban $\Delta m_i = \delta[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\Delta x_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ ga teng bo'ladi.

Bu polosaning og'irlik markazi taxminan tegishli to'g'ri to'rtburchakning markazida bo'lsa, $(x_i)_c = \xi_i$, $(y_i)_c = \frac{f_2(\xi_i)+f_1(\xi_i)}{2}$ bo'ladi.

Endi har bir polosani massasi tegishli polosaning massasiga teng bo'lgan va polosaning og'irlik markaziga to'plangan nuqta bilan almashtirib, butun shakl og'irlik markazi koordinatalarini hisoblash uchun ushbu taqribiy formulani olamiz:

$$x_c = \frac{\sum \xi_i \delta[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\Delta x_i}{\sum \delta[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\Delta x_i};$$

$$y_c = \frac{\frac{1}{2}\sum [f_2(\xi_i) + f_1(\xi_i)] \cdot \delta[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\Delta x_i}{\sum \delta[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\Delta x_i}.$$

$\Delta x_i \to 0$ da limitga o'tib, berilgan shakl og'irlik markazining koordinatalarini topamiz:

$$x_c = \frac{\int_a^b x[f_2(x) - f_1(x)]dx}{\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx}; \quad y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b [f_2(x) + f_1(x)] \cdot \delta[f_2(x) - f_1(x)]dx}{\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx}.$$

Bu formulalar har qanday bir jinsli tekis shakllar uchun o'rinli bo'ladi.

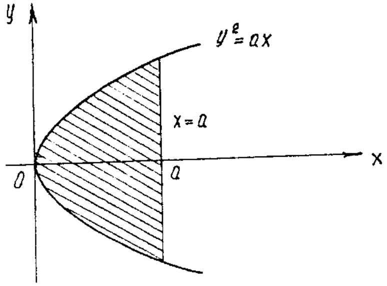
M i s o l. $y^2 = ax$ parabolaning $x = a$ to'g'ri chiziq bilan kesishishidan hosil bo'lgan segment og'irlik markazining koordinatalarini aniqlang (131-chizma).

Yechish. Berilgan holda:

$$f_2(x) = \sqrt{ax},$$

$$f_1(x) = -\sqrt{ax};$$

$$x_c = \frac{2\int\limits_0^a x\sqrt{ax}dx}{2\int\limits_0^a \sqrt{ax}dx} = \frac{2\sqrt{a}\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^a}{2\sqrt{a}\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a} = \frac{\frac{4}{5}a^3}{\frac{4}{3}a^2} = \frac{3}{5}a;$$



131-chizma.

$y_c = 0$ (chunki segment Ox o'qqa nisbatan simmetrik).

8.5.4. CHIZIQ, DOIRA VA SILINDRNING INERSIYA MOMENTLARINI ANIQ INTEGRAL YORDAMI BILAN HISOBLASH

To'g'ri burchakli xOy koordinatalar tekisligida massalari m_1, m_2, ..., m_n bo'lgan $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$, ..., $P_n(x_n; y_n)$ moddiy nuqtalar sistemasi berilgan bo'lsin. Mexanikadan ma'lumki, moddiy nuqtalar sistemasining 0 nuqtaga nisbatan inersiya momenti quyidagicha:

$$I_0 = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2)m_i \quad \text{yoki}$$

$$I_0 = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 m_i, \qquad (1)$$

bunda

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}.$$

Egri chiziq $y = f(x)$ tenglama bilan berilgan bo'lsin, bunda $a \le x \le b$. Shuning bilan birga, $f(x)$ funksiya va uning hosilasi $f'(x)$ ham uzluksiz funksiya bo'lsin. Bu egri chiziq moddiy chiziqdan iborat va chiziqning zichligi γ ga teng bo'lsin. Chiziqning uzunligini Δs_1, Δs_2, ..., Δs_n bo'lgan n ta bo'lakka bo'lamiz, bunda $\Delta s_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$ bo'laklarning massalari $\Delta m_1 = \rho \cdot \Delta s_1$; $\Delta m_2 = \rho \cdot \Delta s_2$; ...; $\Delta m_n = \rho \cdot \Delta s_n$ bo'lsin. Egri chiziq yoyining har bir bo'lagida abssissasi ξ_i bo'lgan ixtiyoriy nuqta olamiz. Bu nuqtalarning ordinatasi $\eta_i = f(\xi_i)$ bo'ladi. U holda yoyning O nuqtaga nisbatan inersiya momenti taqriban tubandagicha bo'ladi:

$$I_0 \approx \sum_{i=1}^{n}(\xi_i^2 + \eta_i^2)\rho \cdot \Delta S_i. \qquad (2)$$

(2) yig'indi limitga ega. Shunga ko'ra bu limit moddiy chiziqning inersiya momentini ifodalaydi:

$$I_0 = \rho\int_a^b [x^2 + f^2(x)]\sqrt{1 + f'^2(x)}dx. \tag{3}$$

(3) formulaga asosan uzunligi l bo'lgan ingichka bir jinsli tayoqchaning oxirgi uchiga nisbatan inersiya momentini keltirib chiqarish mumkin. Buning uchun tayoqchani Ox o'q kesmasi bilan ustma-ust joylashtiramiz, $0 \le x \le l$ (132-chizma), bunda: $\Delta s_i = \Delta x_i$; $\Delta m_i = \gamma \cdot \Delta x_i$; $r_i^2 = x_i^2$. (3) formuladan $I_0 = \gamma\int_0^l x^2 dx = \gamma\frac{l^3}{3}$ ga ega bo'lamiz.

Agar tayoqchaning massasi M berilgan bo'lsa, u holda $\gamma = \frac{M}{l}$ ga teng bo'lib, yuqoridagi formula quyidagi ko'rinishni oladi: $I_0 = \frac{1}{3}Ml^2$. Endi radiusi R bo'lgan bir jinsli doiraning markaziga nisbatan inersiya momentini topaylik. δ — doira yuzi birligining zichligi bo'lsin. Doirani n ta halqalarga ajratamiz. Bitta halqani olib qaraylik. Uning ichki radiusi r_i, tashqi radiusi $r_i + \Delta r_i$ bo'lsin (133-chizma).

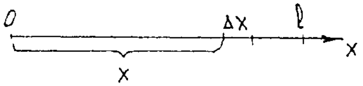
Bu halqaning massasi $\Delta m_i = \delta \cdot 2\pi r^2 \cdot \Delta r_i$ ga teng bo'ladi. Bu massaning markazga nisbatan inersiya momenti (radiusi r bo'lgan aylananing markaziga nisbatan inersiya momenti $I_0 = \gamma 2\pi r^3$ bo'lganligidan) $(\Delta I_0)_i = \delta 2\pi r_i \cdot \Delta r_i \cdot r_i^2 = \delta 2\pi r_i^3 \Delta r_i$ ga teng.

Butun doiraning inersiya momenti halqalar sistemasi bo'lgani uchun taqriban tubandagi formula bilan ifoda etiladi:

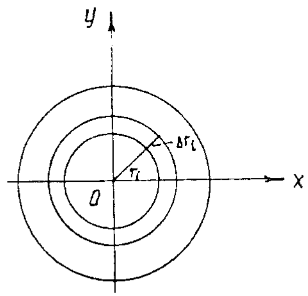
$$I_0 \approx \sum_{i=1}^{n} \delta 2\pi r_i^3 \Delta r_i. \tag{4}$$

$\Delta r_i \to 0$ da limitga o'tib, doira yuzining markazga nisbatan inersiya momentini hosil qilamiz:

$$I_0 = \delta 2\pi\int_0^l r^3 dx = \pi \cdot \delta \cdot \frac{R^4}{2}. \tag{5}$$



132-chizma.



133-chizma.

Agar doiraning massasi M berilgan bo'lsa, u holda sirt zichligi tubandagiga teng: $\delta = \frac{M}{\pi R^2}$. Bu qiymatni (5) ga qo'ysak,

$$I_0 = \frac{MR^2}{2} \tag{6}$$

ga ega bo'lamiz.

Agar asosining radiusi R va massasi M bo'lgan doiraviy silindrning o'qiga nisbatan inersiya momentini hisoblasak, u ham (6) formula bilan topiladi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. $y=f(x)$ egri chiziq, Ox o'qi, $x=a$ va $x=b$ $(a<b)$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan tekis shakl yuzi qanday hisoblanadi?
2. Egri chiziq tenglamalari parametrik ko'rinishda berilgan tekis shakllarning yuzi Dekart koordinatalarida qanday hisoblanadi?
3. Qutb koordinatalar sistemasida egri chiziq bilan chegaralangan egri chiziqli sektorning yuzini hisoblash formulasini yozing.
4. Tekis egri chiziq yoyi uzunligini Dekart koordinatalar sistemasida hisoblash formulasini yozing.
5. Aylanish jismining hajmini hisoblash formulasini keltirib chiqaring.
6. Aylanish jismining sirtini hisoblash formulasini keltirib chiqaring.
7. Egri chiziqning koordinata o'qlariga nisbatan statik momentini hisoblash formulasini yozing.
8. Egri chiziqli trapetsiyaning abssissalar o'qiga nisbatan statik momentini hisoblash formulasini yozing.
9. Tekislikda moddiy nuqtalar sistemasining og'irlik markazi koordinatalarini hisoblash formulasini yozing.
10. Chiziq, doira va silindrning mos ravishda nuqtaga, doira markaziga, silindr o'qiga nisbatan inersiya momentlarini hisoblash formulalarini yozing.

9-bob. QATORLAR

9.1 SONLI QATORLAR

9.1.1. SONLI QATOR VA UNING YIG'INDISI

Cheksiz sonlar ketma-ketligi $\{a_n\}$, $n\in N$ berilgan bo'lsin, ya'ni

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots \tag{1}$$

1-ta'rif. Ushbu ifoda *sonli qator* deyiladi:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{2}$$

Bunda a_1, a_2, ..., a_n,... lar sonli qatorning *hadlari* deb ataladi.

2-ta'rif. Qatorning oldingi n ta chekli hadlarining yig'indisi $S_n=a_1 + a_2+\ldots+a_n$ qatorning *n-qismiy yig'indisi* deyiladi.

Quyidagi qismiy yig'indilarni qaraymiz:

$S_1=a_1$,

$S_2=a_1+a_2$,

....

....

....

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Agar $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ chekli limit mavjud bo'lsa, uni (2) qatorning *yig'indisi* deb ataladi va qator *yaqinlashuvchi* deyiladi. Agar $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ mavjud bo'lmasa, qator *uzoqlashadi* va uning yig'indisi bo'lmaydi.

M i s o l. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n \tag{3}$$

qatorni tekshiramiz.

Bu qator 1-hadi $a(a\neq 0)$ va maxraji q bo'lgan geometrik progressiyadir. Geometrik progressiya dastlabki n ta hadining yig'indisi ($q\neq 1$ bo'lganda) $S_n = \frac{a-aq^n}{1-q}$ yoki $S_n = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}$ ga teng.

Agar $|q|<1$ bo'lsa, $n\to\infty$ da $q^n\to 0$, demak, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right)= = \frac{a}{1-q}$.

Demak, $|q|<1$ bo'lganda, (3) qator yaqinlashadi va uning yig'indisi $S=\frac{a}{1-q}$ ga teng bo'ladi.

Agar $|q|>1$ bo'lsa, $n\to\infty$ da $|q^n|\to\infty$, shuning uchun $n\to\infty$ da, $\frac{a-aq^n}{1-q}\to\pm\infty$, ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ mavjud emas.

Shunday qilib, $|q|>1$ bo'lganda, (3) qator uzoqlashadi. Agar $q=1$ bo'lsa, (3) qator $a+a+a+\ldots$ ko'rinishda bo'ladi. Bu holda $S_n=na$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty$, ya'ni qator uzoqlashadi. Agar $q=-1$ bo'lsa, (3) qator $a-a+a-\ldots$ ko'rinishda bo'ladi. Bu holda n juft bo'lganda $S_n=0$, n toq bo'lganda, $S_n=a$ bo'ladi. Demak, S_n ning limiti bo'lmaydi, qator uzoqlashadi. Shunday qilib, geometrik progressiya maxrajining absolut qiymati birdan kichik bo'lgandagina yaqinlashadi.

Sonli qatorning yaqinlashishi to'g'risidagi asosiy teoremalarni qaraymiz.

1-teorema. *Agar berilgan (2) qatorning bir qancha hadlarini tashlash bilan hosil qilingan qator yaqinlashsa, u holda berilgan qator ham yaqinlashadi. Boshqacha aytganda qatorning chekli sondagi hadlarini tashlab yuborish uning yaqinlashishiga ta'sir etmaydi.*

Isbot. Faraz etaylik, (1) qator dastlabki n ta hadining yig'indisi S_n, tashlangan k ta hadining yig'indisi S_k bo'lsin.

σ_{n-k} — qatorning S_n yig'indiga kiruvchi va S_k ga kirmaydigan hadlarining yig'indisi bo'lsin, u holda $S_n=S_k+\sigma_{n-k}$ bo'ladi, bunda S_k — o'zgarmas son (n ga bog'liq emas).

Oxirgi munosabatdan, agar $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{n-k}$ mavjud bo'lsa, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ ham mavjud bo'lishi, agar $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ mavjud bo'lsa, $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{n-k}$ ham mavjud bo'lishi kelib chiqadi, bu esa teoremaning to'g'riligini ko'rsatadi.

2-teorema. *Agar*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{4}$$

qator yaqinlashsa va yig'indisi S ga teng bo'lsa,

$$Ca_1+Ca_2+\ldots \tag{5}$$

qator ham yaqinlashadi va yig'indisi Sa ga teng bo'ladi, bunda C — o'zgarmas son.

I s b o t. (4) qatorning n-qismiy yig'indisini S_n bilan, (5) qatorining n-qismiy yig'indisini σ_n bilan belgilaymiz, u holda $\sigma_n = Ca_1 + Ca_2 + \ldots$ $\ldots + Ca_n = C(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = CS_n$ bo'lgani uchun (5) qator yaqinlashadi.

3-teorema. *Agar* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *va* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *qatorlar yaqinlashsa va ularning yig'indilari mos ravishda* $\overline{S}$ *va* $\overline{\overline{S}}$ *ga teng bo'lsa, u holda* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ *va* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ *qatorlar ham yaqinlashadi va yig'indilari mos ravishda* $\overline{S} + \overline{\overline{S}}$ *va* $\overline{S} - \overline{\overline{S}}$ *ga teng bo'ladi.* (Isbot qilish talabalarni o'zlariga topshiriladi.)

9.1.2. QATOR YAQINLASHISHINING ZARURIY ALOMATINI IFODALOVCHI TEOREMA

Teorema. *Agar* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *qator yaqinlashsa, n cheksiz o'sib borganda uning n-hadi nolga intiladi, ya'ni* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

I s b o t. Faraz qilaylik, $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ qator yaqinlashsin, ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ tenglik o'rinli bo'lsin, bunda S qatorning yig'indisi, lekin u holda $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ tenglik ham o'rinli. Birinchi tenglikdan ikkinchi tenglikni hadlab ayirib, quyidagini hosil qilamiz.

$$\lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0 \quad \text{yoki} \quad \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = 0,$$

biroq $S_n - S_{n-1} = a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Natija. *Agar* $n\to\infty$ *da qatorning n-hadi nolga intilmasa, qator uzoqlashadi.*

M i s o l. $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \ldots + \frac{n}{2n+1} + \ldots$. qator uzoqlashadi, chunki $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right) = \frac{1}{2} \neq 0$.

Bu alomat faqat zaruriy, lekin yetarli emas, ya'ni qatorning n-hadi nolga intilishidan qatorning yaqinlashishi kelib chiqmasligi mumkin, ya'ni qator uzoqlashuvchi bo'lishi ham mumkin.

9.1.3. MUSBAT HADLI QATORLARNING YAQINLASHUVCHANLIGI. TAQQOSLASH ALOMATLARI

Oldingi mavzulardan ma'lumki, qatorning yig'indisi deb uning xususiy yig'indilari ketma-ketligining limiti tushuniladi. Ammo, ayrim hollarda bu limitni topish katta qiyinchiliklar tug'diradi.

Bunday hollarda qatorning yig'indisi taqribiy topiladi, u yetarlicha katta n nomerli S_n xususiy yig'indi bilan almashtiriladi. Buning uchun esa qatorning yaqinlashuvchi ekanligiga ishonch hosil qilish kerak. Biz qator yaqinlashuvchi bo'lishini yetarlilik alomatlarini ko'rib o'tamiz. Dastlab hadlari musbat bo'lgan qatorlar uchun yaqinlashish va uzoqlashishning yetarli alomatlarini qaraymiz. Bunday qatorlar *musbat hadli qatorlar* deyiladi. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

qator berilgan bo'lsin, bunda $a_n \geq 0 (\forall n \in \mathrm{N})$. Musbat hadli qatorlarning barcha hadlari musbat bo'lgani uchun, S_1, S_2, S_3,..., S_n,... yig'indilar n ortishi bilan o'sadi:

$$S_1 < S_2 < S_3 < \ldots < S_n < \ldots$$

Bunda 2 hol bo'lishi mumkin.

1) xususiy yig'indilar ketma-ketligi chegaralangan, ya'ni $\forall n \in \mathrm{N}$ da $S_n < M$.

Ketma-ketlik chegaralanganligi uchun qator yaqinlashuvchidir.

2) xususiy yig'indilar ketma-ketligi chegaralanmagan. Bu holda $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, demak, qator uzoqlashuvchidir.

Teorema. *Agar (1) qatorning qismiy yig'indilaridan iborat S_n ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u holda (1) qator yaqinlashuvchi bo'ladi.*

I s b o t. (1) qatorning qismiy yig'indilaridan iborat S_n ketma-ketlikni olaylik. Bu ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan bo'lsin, ya'ni $S_n \leq M$ $(\forall n \in \mathrm{N})$.

Ikkinchi tomondan, qatorning hadlarini musbat ekanligini e'tiborga olib, tubandagilarni topamiz:

$$S_{n+1} = a_1 + a_2 + \ldots. + a_n + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n.$$

Demak, ixtiyoriy $n \in N$ uchun $S_n \leq S_{n+1}$. Bu esa ketma-ketlikning o'suvchi ekanligini ko'rsatadi. Shunday qilib, ketma-ketlik o'suvchi va u yuqoridan chegaralangan. Bundan esa ketma-ketlik chekli limitga ega bo'lishi kelib chiqadi:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S.$$

Demak, berilgan (1) qator yaqinlashuvchi.

N a t i j a. *Agar* (1) *qatorning qismiy yig'indilaridan iborat* S_n *ketma-ketlik yuqoridan chegaralanmagan bo'lsa, u holda (1) qator uzoqlashuvchi bo'ladi.*

Endi qator yaqinlashuvchi bo'lishining yetarli alomatini qaraymiz.

Birinchi taqqoslash alomati. Tubandagi musbat hadli qatorlar berilgan bo'lsin:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots (*)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots (**)$$

(*) qatorning hadlari (**) qatorning mos hadlaridan katta bo'lmasin:

$$a_1 \leq b_1;\ a_2 \leq b_2;\ \ldots;\ a_n \leq b_n \ldots (***)$$

(**) qator yaqinlashuvchi bo'lsin.

Bunday holda (*) qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi va uning yig'indisi (**) qatorning yig'indisidan ortiq bo'lmaydi.

I s b o t. (*) va (**) qatorlarning xususiy yig'indilarini mos ravishda S_n va S'_n bilan belgilaymiz:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n ;$$

$$S'_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n .$$

(***) tenglikdan $S_n \leq S'_n$ ekani kelib chiqadi. (**) qator yaqinlashuvchi bo'lgani uchun, $\lim\limits_{n \to \infty} S'_n = S'$ ga teng. Qatorning hadlari musbat bo'lgani uchun $S'_n < S'$ bo'ladi.

Demak, (*) qatorning xususiy yig'indilari chegaralangan bo'lgani uchun yaqinlashuvchi va uning yig'indisi (**) qatorning yig'indisidan katta emas,chunki $S_n < S'$.

Ikkinchi taqqoslash alomati (qator uzoqlashuvchiligining yetarli alomati). Ikkita musbat hadli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ va $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorlar berilgan bo'lsin. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning hadlari $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorning mos hadlaridan kichik bo'lmasin, ya'ni $a_1 \geq b_1$; $a_2 \geq b_2$; ...; $a_n \geq b_n$... bo'lib, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ uzoqlashuvchi bo'lsin. Bu holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

Alomatni isbotlash talabalarning o'zlariga topshiriladi.

M i s o l. $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ (a) qatorning yaqinlashuvchanligini tekshiring.

Y e c h i s h. Bu qatorni $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}}$ (b) qatorga taqqoslaymiz.

(a) qator maxraji $q = \frac{1}{2} < 1$ bo'lgan geometrik progressiya hadlaridan tashkil topgan va u yaqinlashuvchi, (1) qatorning hadlari (2) qatorning mos hadlaridan katta emas.Shuning uchun birinchi taqqoslash alomatiga asosan (b) qator ham yaqinlashuvchi.

9.1.4. DALAMBER VA KOSHI ALOMATLARI

1-lemma. *Musbat hadli* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *qator berilgan bo'lsin. Agar shunday q soni mavjud bo'lib,ixtiyoriy* $n \in \mathrm{N}$ uchun $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ *(1) tengsizlik o'rinli bo'lsa, qator yaqinlashadi. Agar ixtiyoriy* $n \in \mathrm{N}$ *uchun* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ *(2) bo'lsa, qator uzoqlashadi.*

I s b o t. Faraz qilaylik, (1) shart bajarilsin, u holda $a_{n+1} \leq qa_n \leq q^2 a_{n-1} \leq \ldots \leq a_1 q^n$ bo'ladi, bundan esa ixtiyoriy $n \in \mathrm{N}$ uchun $a_n \leq a_1 q^n$ o'rinli. $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{q} \sum_{n=1}^{\infty} q^n$ qator $0<q<1$ holda yaqinlashadi. U holda qatorlarni taqqoslash alomatiga ko'ra berilgan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashadi. (2) shart bajarilsa, qatorning umumiy hadi nolga intilmaydi, ya'ni qator yaqinlashishining zaruriy sharti bajarilmaydi.

Demak, qator uzoqlashadi.

1-teorema (Dalamber alomati). *Agar musbat hadli* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *(1) qator* $(n+1)$*-hadining n-hadga nisbati* $n\to\infty$ *da l (chekli) limitga ega bo'lsa, ya'ni* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ *(2) bo'lsa,* $l<1$ *bo'lganda qator yaqinlashadi,* $l>1$ *bo'lganda qator uzoqlashadi.*

I s b o t. $l<1$ bo'lsin. Ketma-ketlikning ta'rifiga ko'ra $\forall\varepsilon>0$ uchun shunday n nomer topiladiki, $n\in$N uchun $l-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}<l+\varepsilon$ tengsizlik bajariladi.

Agar $l>1$ bo'lsa, $q+\varepsilon<1$ tengsizlik o'rinli bo'ladigan $\forall\varepsilon>0$ ni tanlab, $n\in$N uchun $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le l+\varepsilon<1$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. 1-lemmaga asosan esa (1) qatorning yaqinlashishi kelib chiqadi.

2-lemma. *Musbat hadli* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *qator berilgan bo'lsin. U holda* $\forall n\ge$ N *uchun shunday l soni topiladiki,* $\sqrt[n]{a_n}\le l<1$ *tengsizlik bajarilsa, qator yaqinlashadi, agar* $\sqrt[n]{a_n}\ge 1$ *bo'lsa,qator uzoqlashadi.* Lemma isboti taqqoslash alomatlariga asoslanadi.

2-teorema (Koshi alomati). *Musbat hadli* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *qator uchun* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$ *shart bajarilsin. U holda* $l<1$ *bo'lsa,qator yaqinlashadi.* $l>1$ *bo'lsa qator uzoqlashadi.*

Teorema isboti 2-lemmaga asoslanadi.

1-m i s o l. $1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}+\ldots$ qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Y e c h i s h. Bunda

$$\mathrm{U}_n=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}=\frac{1}{n!},$$

$$\mathrm{U}_{n+1}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n(n+1)}=\frac{1}{(n+1)!},$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}.$$

Dalamber alomatiga asosan:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1.$$

Demak, qator yaqinlashadi.

2-misol. $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+\ldots$ qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Koshi alomatidan foydalanamiz:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1,\text{ qator yaqinlashadi.}$$

Dalamber va Koshi alomatlarida $l=1$ ga teng bo'lsa, qo'shimcha tekshirish talab qilinadi.

9.1.5. ISHORALARI NAVBATLASHUVCHI QATORLAR. LEYBNITS TEOREMASI

Biz musbat hadli qatorlarni o'rgandik. Endi hadlarining *ishoralari navbatlashuvchi* qatorlarni, ya'ni $a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots(*)$ ko'rinishdagi qatorlarni qaraymiz,bunda $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$ — musbat hadlar.

Leybnits teoremasi. *Agar ishoralari navbatlashuvchi* $a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots(a_n>0)$ *qatorning hadlari* $a_1>a_2>a_3>a_4>\ldots$ *va* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ *bo'lsa,(*) qator yaqinlashadi, uning yig'indisi musbat bo'ladi va birinchi haddan katta bo'lmaydi.*

Misol. Ushbu $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ qator yaqinlashadi, chunki

1) $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\ldots$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$

Bu qator n ta hadining yig'indisi $S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ $\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ berilgan qatorning S yig'indisi $\frac{1}{n+1}$ dan kichik miqdorga farq qiladi.

9.1.6. O'ZGARUVCHAN ISHORALI QATORLAR. ABSOLUT VA SHARTLI YAQINLASHISH

Agar qatorning hadlari orasida musbatlari ham, manfiylari ham bo'lsa, qator *o'zgaruvchan ishorali* qator deb ataladi. Ishoralari navbatlashuvchi qatorlar o‘zgaruvchan ishorali qatorning xususiy holidir.

O‘zgaruvchan ishorali qatorga ushbu qatorni misol qilib keltirish mumkin:

$$\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9^2}-\ldots+(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{n^2}+\ldots$$

O‘zgaruvchan ishorali qatorning ba’zi xossalarini qaraymiz. a_1, a_2, ..., a_n,... sonlarning musbati ham, manfiysi ham bo‘lishi mumkin deb faraz qilamiz.

1-teorema (qator yaqinlashishining yetarli sharti). *O‘zgaruvchan ishorali* $a_1+a_2+\ldots+a_n$ (1) *qator hadlarining absolut* qiymatlaridan tuzilgan $|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|$ (2) *qator yaqinlashsa, berilgan o‘zgaruvchan ishorali qator ham yaqinlashadi.*

M i s o l. Ushbu $\frac{\sin\alpha}{1^2}+\frac{\sin 2\alpha}{2^2}+\ldots+\frac{\sin n\alpha}{n^2}+\ldots$ (3) qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Y e c h i s h. Berilgan qator bilan birga $\left|\frac{\sin\alpha}{1^2}\right|+\left|\frac{\sin 2\alpha}{2^2}\right|+\ldots+\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|+\ldots$ (4) va $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$ (5) qatorlarni qaraymiz.

(5) qator yaqinlashadi, (4) qatorning hadlari (5) qatorning mos hadlaridan katta emas, demak, (4) qator yaqinlashadi, teoremaga ko‘ra (3) qator ham yaqinlashadi.

Ta’rif. O‘zgaruvchan ishorali $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ qator hadlarining absolut qiymatlaridan tuzilgan qator yaqinlashsa, o‘zgaruvchan ishorali qator *absolut yaqinlashuvchi* qator deb ataladi.

Agar o‘zgaruvchan ishorali qatorning o‘zi yaqinlashuvchi, ammo uning hadlarining absolut qiymatlaridan tuzilgan qator uzoqlashuvchi bo‘lsa, bu o‘zgaruvchan ishorali qator *shartli* yoki *noabsolut yaqinlashuvchi* qator deyiladi.

M i s o l. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ qator shartli yaqinlashuvchi qatordir, chunki uning hadlarining absolut qiymatlaridan tuzilgan garmonik qator uzoqlashuvchidir.

Absolut va shartli yaqinlashuvchi qatorlar tubandagi xossalarga ega:

1. Agar qator absolut yaqinlashuvchi bo‘lsa, uning hadlarining o‘rinlarini ixtiyoriy ravishda almashtirilganda ham, u absolut yaqinlashuvchanligicha qoladi. Bu holda qatorning yig‘indisi qator hadlarining tartibiga bog‘liq bo‘lmaydi.

2. Agar qator shartli yaqinlashsa, ixtiyoriy ravishda olingan A soni qanday bo'lishidan qat'iy nazar, bu qatorning hadlarini qatorning yig'indisi shu A sonining o'ziga teng bo'ladigan qilib almashtirish mumkin.

Shu bilan birga shartli yaqinlashuvchi qator hadlarining o'rinlarini shunday almashtirish mumkinki, bu o'rin almashtirishdan keyin hosil bo'lgan qator uzoqlashuvchi bo'lib qoladi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Qanday qator sonli qator deyiladi?
2. Sonli qator yig'indisi deganda nimani tushunasiz?
3. Sonli qator yaqinlashishining zaruriy sharti nimadan iborat?
4. Sonli qator yaqinlashishi haqidagi teoremalarni ifodalang.
5. Musbat hadli qator yaqinlashishining yetarli alomatlarini aytib bering.
6. Sonli qator yaqinlashishini taqqoslash alomatlarini ifodalang.
7. Dalamber va Koshi alomatlarini ifodalovchi formulalarni yozib, izohlab bering .Misollar keltiring.
8. Ishoralari almashinuvchi qatorlar uchun Leybnits formulasini yozing.
9. Qator absolut va shartli yaqinlashishini izohlang va misollar keltiring.

9.2. DARAJALI QATORLAR

9.2.1. FUNKSIONAL QATORLAR

Biror to'plamda aniqlangan $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_n(x)$,... funksiyalar berilgan bo'lsin.

Quyidagi ko'rinishdagi

$$a_1(x)+a_2(x)+\ldots+\ a_n(x)+\ldots \qquad (1)$$

qator *funksional qator* deyiladi. x ga aniq son berib, turli sonli qatorlarni hosil qilamiz, bular yaqinlashuvchi va uzoqlashuvchi bo'lishi mumkin. x ning funksional qator yaqinlashadigan qiymatlari to'plami shu qatorning *yaqinlashish sohasi* deyiladi. Qatorning yaqinlashish sohasidagi yig'indisi Sx ning biror funksiyasidir. Shuning uchun funksional qatorning yig'indisi $S(x)$ bilan belgilanadi.

M i s o l. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$ funksional qatorning yaqinlashish sohasini toping.

Bu qator x ning $(-1;\ 1)$ intervaldagi barcha qiymatlarida, ya'ni $|x|<1$ shartni qanoatlantiradigan hamma qiymatlarida yaqinlashadi. x ning $(-1;\ 1)$ intervaldagi hamma qiymatlarida qatorning yig'indisi

$\frac{1}{1-x}$ ga teng. Shunda berilgan qator $(-1;\ 1)$ intervalda $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ qatorning yig'indisi bo'lgan $S(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots$ funksiyani aniqlaydi.

(1) qatorning birinchi n ta hadi yig'indisini $S_n(x)$ bilan belgilaymiz. Agar (1) qator yaqinlashsa va uning yig'indisi $S(x)$ ga teng bo'lsa, $S(x)=Sn(x)+r_n(x)$ bo'ladi, bunda $r_n(x)$ ushbu $a_{n+1}(x)+a_{n+2}(x)+..$ qatorning yig'indisidir, ya'ni $r_n(x)=a_{n+1}(x)+a_{n+2}(x)+..$ miqdor (1) qatorning qoldig'i deyiladi. Qatorning yaqinlashish sohasidagi x ning barcha qiymatlari uchun $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$ o'rinli, shuning uchun $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}[S(x) - S_n(x)] = 0$, ya'ni yaqinlashuvchi qator uchun $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}[S(x) - S_n(x)] = 0$ bo'ladi.

9.2.2. KUCHAYTIRILGAN (MUNTAZAM YAQINLASHUVCHI) FUNKSIONAL QATORLAR VA ULARNING XOSSALARI

Ta'rif. $[a;\ b]$ kesmada yaqinlashuvchi

$$a_1(x)+a_2(x)+\ldots+\ a_n(x)+\ldots \qquad (1)$$

funksional qator uchun shunday yaqinlashuvchi musbat hadli

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+ \qquad (2)$$

qator mavjud bo'lib, berilgan (1) qator hadlarining absolut qiymatlari x ning $[a;\ b]$ kesmaga tegishli istalgan qiymatida (2) musbat hadli qatorning mos hadlaridan ortiq bo'lmasa, ya'ni $|a_n(x)| \le \alpha_n$ $(n=1,$ $2,\ldots)$ bo'lsa, u holda (1) qator $[a;\ b]$ kesmada *kuchaytirilgan* (muntazam yaqinlashuvchi) qator deb ataladi.

Kuchaytirilgan qatorlarning xossalari haqidagi ayrim teoremalarni isbotsiz keltiramiz.

1-teorema. $[a;\ b]$ *kesmada kuchaytirilgan har qanday qator bu kesmaning istalgan nuqtasida absolut yaqinlashadi.*

2-teorema. $[a;\ b]$ *kesmada kuchaytirilgan* $a_1(x)+a_2(x)+\ldots+a_n(x)+\ldots$ *funksional qatorning barcha hadlari uzluksiz bo'lsa,u holda uning yig'indisi ham* $[a;\ b]$ *kesmada uzluksiz bo'ladi.*

3-teorema. *Agar* $[a;\ b]$ *kesmada kuchaytirilgan* $a_1(x)+a_2(x)+\ldots+a_n(x)+\ldots$ *funksional qatorning barcha hadlari shu kesmada yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda bu qatorni hadma-had integrallash mumkin.*

Bu teoremadan ko'rinadiki, agar x_1 va x_2 lar $[a; b]$ kesmaning istalgan ikkita nuqtasi bo'lsa, u holda tubandagi munosabat o'rinli bo'ladi:

$$\int_{x_1}^{x_2} [a_1(x) + a_2(x) + ... + a_n(x) + ...]dx = \int_{x_1}^{x_2} a_1(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} a_2(x)dx ... +$$
$$+ \int_{x_1}^{x_2} a_n(x)dx + ...$$

4-teorema. $[a; b]$ *kesmada* $a_1(x)+a_2(x)+...+a_n(x)+...$ *funksional qator yaqinlashuvchi va uning* $a_n(x)(n=1, 2,..)$ *hadlari uzluksiz hosilalarga ega bo'lsin. Agar bu qatorni hadma-had differensiallash bilan hosil qilingan qator* $[a; b]$ *kesmada kuchaytirilgan bo'lsa, u holda uning yig'indisi berilgan qatorning hosilasiga teng bo'ladi, ya'ni.*

$$[a_1(x) + a_2(x) + ... + a_n(x) + ...]' = a_1'(x) + a_2'(x) + ... + a_n'(x) + ...$$

5-teorema. $[a; b]$ *kesmada kuchaytirilgan* $a_1(x)+a_2(x)+...+a_n(x)+...$ *qatorni* $\varphi(x)$ *chegaralangan funksiyaga ko'paytirish bilan hosil qilingan* $\varphi(x)a_1(x)+\varphi(x)a_2+...+\varphi(x)a_n(x)+...$ *qator* $[a; b]$ *kesmada kuchaytirilgan qator bo'ladi.*

9.2.3. DARAJALI QATORLAR, YAQINLASHISH RADIUSI. ABEL TEOREMASI

Ta'rif. *Darajali qatorlar* deb

$$a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+a_3(x-a)^3+...+a_n(x-a)^n+... \qquad (1)$$

ko'rinishdagi funksional qatorga aytiladi. Bunda a_0, a_1, a_2,... a_n... o'zgarmas sonlar bo'lib, ular qatorning koeffitsiyentlari deyiladi. Xususan, $a=0$ bo'lganda darajali qator $a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...$ (2) ko'rinishda bo'ladi. Darajali qatorning yaqinlashish sohasi biror intervaldan iborat. Bu interval ba'zan nuqtaga aylanishi mumkin.

1-teorema. Abel teoremasi. *1) Agar darajali qator noldan farqli biror* x_0 *qiymatda yaqinlashsa,* x *ning* $|x|<|x_0|$ *tengsizlikni qanoatlantiruvchi har qanday qiymatlarida u absolut yaqinlashadi.*

2) *Agar qator biror* x_0 *qiymatda uzoqlashsa,* x *ning* $|x|>|x_0|$ *tengsizlikni qanoatlantiruvchi har bir qiymatida qator uzoqlashadi.*

2-teorema. *Darajali qatorning yaqinlashish sohasi markazi koordinatalar boshida bo'lgan intervaldan iboratdir.*

Ta'rif. Darajali qatorning *yaqinlashish intervali* deb, $-R$ dan, $+R$ gacha bo'lgan shunday intervalga aytiladiki,bu interval ichida yotgan har qanday x nuqtada qator yaqinlashadi, uning tashqarisidagi x nuqtalarda esa qator uzoqlashadi.

R soni darajali qatorning *yaqinlashish radiusi* deyiladi. Intervalning ikki uchida berilgan qatorning yaqinlashish yoki uzoqlashish haqidagi masala har bir konkret qator uchun yakka-yakka hal etiladi. Ba'zi qatorlarning yaqinlashish intervali nuqtaga aylanishi ($R=0$), ba'zilarida esa Ox o'qini butunlay o'z ichiga olishini ($R=\infty$) ko'rish mumkin. Darajali qatorning yaqinlashish radiusini aniqlaymiz. Ushbu

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \tag{3}$$

qator berilgan bo'lsin.

Bu qator hadlarining absolut qiymatlaridan tuzilgan qatorni qaraymiz:

$$|a_0|+|a_1||x|+|a_2|\left|x^2\right|+|a_3|\left|x^3\right|+\ldots+|a_n|\left|x^n\right|+\ldots \tag{4}$$

Qatorning yaqinlashishini aniqlash uchun Dalamber alomatini qo'llaymiz:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x|=L|x|$ limit mavjud bo'lsin deb faraz qilamiz. Bu yerda $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$; u holda Dalamber alomatiga asosan,agar $L|x|<1$, ya'ni $|x|<\frac{1}{L}$ bo'lsa, qator yaqinlashuvchi va $L|x|>1$, ya'ni $|x|>\frac{1}{L}$ bo'lsa, uzoqlashuvchi bo'ladi. Demak, (1) qator $|x|<\frac{1}{L}$ bo'lganda absolut yaqinlashadi. Demak, $\left(-\frac{1}{L};\ \frac{1}{L}\right)$ interval (1) darajali qatorning yaqinlashish intervali, yaqinlashish radiusi esa $R=\frac{1}{L}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ formuladan topiladi.

Yaqinlashish intervalini aniqlash uchun shunga o'xshash Koshi alomatidan ham foydalanish mumkin, u holda

$$R=\frac{1}{\lim\sqrt[n]{a_n}}. \tag{5}$$

1-m i s o l. $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$ qatorning yaqinlashish sohasini aniqlang.

Y e c h i s h. To'g'ridan to'g'ri Dalamber alomatini tatbiq etamiz:

$$U_n = x^n; \quad U_{n+1} = x^{n+1}; \quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = |x|.$$

Demak, $|x|<1$ bo'lganda qator yaqinlashadi, $|x|>1$ bo'lganda uzoqlashadi. $(-1;1)$ intervalning chegaralarida qatorni Dalamber alomati yordami bilan aniqlash mumkin emas. Lekin $x=-1$ va $x=1$ bo'lganda qator uzoqlashishi o'z-o'zidan ma'lum.

2-m i s o l. $\frac{2x}{1} - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} - \ldots$ qatorning yaqinlashish sohasini toping.

Y e c h i s h. $U_n = \frac{(2x)^n}{n}$; $U_{n+1} = \frac{(2x)^{n+1}}{n+1}$;

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(2x)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(2x)^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right||2x| = |2x|.$$

Agar $|2x|<1$, ya'ni $|x| < \frac{1}{2}$ bo'lsa, qator yaqinlashadi; $x = -\frac{1}{2}$ bo'lsa, qator uzoqlashadi.

3-m i s o l. $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$ qatorning yaqinlashish sohasini toping.

Y e c h i s h. Berilgan qator hadlarining absolut qiymatlaridan tuzilgan tubandagi qatorni tekshiramiz:

$$1 + \frac{|x|}{1!} + \frac{|x^2|}{2!} + \ldots + \frac{|x^n|}{n!} + \ldots$$

Dalamber alomatini qo'llaymiz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{|x|^n}{n!}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} =$$

$$= |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = |x|\cdot 0 = 0.$$

Demak, x ning istalgan qiymati uchun $\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n} = 0 < 1$.

Dalamber alomatiga asosan, qator butun son o'qida yaqinlashadi. Yaqinlashish radiusi $R=\infty$.

9.2.4. DARAJALI QATORNING XOSSALARI. DARAJALI QATORNI DIFFERENSIALLASH VA INTEGRALLASH

Yaqinlashish intervali $(-R;\ R)$ bo'lgan ushbu

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_nx^n+\dots \qquad (1)$$

darajali qator berilgan bo'lsin. Bu qatordan hadma-had differensiallash bilan hosil qilingan

$$a_1+2a_2x^2+\ a_nnx^{n-1}+\dots \qquad (2)$$

va integrallash bilan hosil qilingan.

$$a_0x+\frac{a_1x^2}{2}+\frac{a_nx^{n-1}}{n+1}+\dots \quad (3)$$ qatorlarni qaraylik.

(2) va (3) qatorlar hadlarining absolut qiymatlaridan tuzilgan qatorlarni Dalamber alomatiga ko'ra tekshiramiz.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ mavjud deb faraz qilsak, (2) va (3) qatorlar ham berilgan (1) qator ega bo'lgan yaqinlashish intervaliga ega bo'lishini ko'rish mumkin.

1-teorema. *Tubandagi $a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n+\dots$ darajali qator $(-R;\ R)$ yaqinlashish intervaliga ega bo'lsa,u holda bu qatordan uni hadma-had differensiallash va integrallash bilan hosil qilingan qatorlar berilgan qator ega bo'lgan yaqinlashish intervaliga ega bo'ladi.*

2-teorema. *Tubandagi $a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n+\dots$ darajali qator $(-R;\ R)$ yaqinlashish intervaliga ega bo'lsa va r son, R dan kichik ixtiyoriy musbat son bo'lsa u holda berilgan darajali qator $[-r;\ r]$ kesmada kuchaytirilgan qator bo'ladi.*

Isbot. Darajali qator yaqinlashish intervalining istalgan nuqtasida absolut yaqinlashishi oldingi mavzulardan ma'lum. Shuning uchun $x=r$ nuqtada musbat ishorali

$$|a_0|+|a_1|\,r+|a_2|\,r^2+\dots+|a_n|\,r^n+\dots \qquad (4)$$

qator yaqinlashadi. $x\,[-r;\ r]$ kesmaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. $|x|\le r$ bo'lgani uchun: $|a_nx^n|\le|a_n|r^n$. Bundan esa berilgan (4) qator hadlarining absolut qiymatlaridan tuzilgan

$$|a_0|\ +\ |a_1x|\ +\ |a_2x^2|+\dots+|a_nx^n|+\dots \qquad (5)$$

qatorning hadlari x ning $[-r;\ r]$ kesmaga tegishli ixtiyoriy qiymatida musbat ishorali (4) sonli qatorning mos hadlaridan katta bo'lmaydi.

Bu esa ta'rifga asosan berilgan darajali qator $[-r;\ r]$ kesmada kuchaytirilganligini bildiradi.

Teorema isbot qilindi.

3-teorema. *$a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...$ darajali qatorning yig'indisi $(-R;\ R)$ yaqinlashish intervalining har bir nuqtasida uzluksiz funksiyadir.*

I s b o t. x_0 yaqinlashish intervalining ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. U holda shunday $r(|x_0|<r<R)$ musbat son mavjudki, $[-r;\ r]$ kesma x_0 nuqtani o'z ichiga oladi. Berilgan darajali qator 2-teoremaga ko'ra $[-r;\ r]$ kesmada kuchaytirilgan qator. Shu sababli uning yig'indisi 2-teoremaga asosan kesmaning ixtiyoriy nuqtasida, xususan x_0 nuqtasida uzluksiz funksiya bo'ladi.

4-teorema. *$a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...$ darajali qatorni o'zining yaqinlashish intervalining ixtiyoriy nuqtasida hadma-had differensiallash mumkin.*

I s b o t. Berilgan darajali qator $(-R;\ R)$ yaqinlashish intervaliga ega bo'lsin. Bu qator hadlarining hosilalaridan tuzilgan ushbu $a_1+2a_2x+...+na_nx^{n-1}+...(*)$ qatorni qaraymiz. Uning yaqinlashish intervali 1-teoremaga asosan berilgan qatorning yaqinlashish intervali bilan bir xil bo'ladi. x yaqinlashish intervalining ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Yaqinlashish intervalining ichida yotuvchi va x_0 nuqtani o'z ichiga oluvchi $[-r;\ r]$ kesmani qaraylik $\{|x_0|<r<R\}$. 2-teoremaga asosan (*) qator kuchaytirilgandir. Shuning uchun uning yig'indisi berilgan qator yig'indisining hosilasiga teng, ya'ni

$$(a_0+a_1x+...+a_nx^n+...)'=a_1+2a_2x+...+na_nx^{n-1}+...$$

5-teorema. *$a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...$ darajali qatorni $(-R;\ R)$ yaqinlashish intervalida hadma-had integrallash mumkin, ya'ni x_1 va x_2 yaqinlashish intervaliga tegishli nuqtalar bo'lsa, u holda*

$$\int_{x_1}^{x_2}(a_0+a_1x+...+a_nx^n+...)dx=\int_{x_1}^{x_2}a_0dx+\int_{x_1}^{x_2}a_1xdx+...+$$

$$+\int_{x_1}^{x_2}a_nx^ndx+...$$

I s b o t. Yaqinlashish intervalida yotuvchi hamda x_1, x_2 nuqtalarni o'z ichiga olgan $[-r;\ r]$ kesmani qaraymiz. $[-r;\ r]$ kesmada darajali qator kuchaytirilgan bo'lganligi uchun uni hadma-had integrallash mumkin.

9.2.5. $(x-a)$ NING DARAJALARI BO'YICHA QATORLAR

Endi $x-a$ ayirmaning darajalari bo'yicha tubandagi

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \ldots + a_n(x-a)^n \ldots \qquad (1)$$

ko'rinishdagi funksional qatorni qaraymiz, bu ham darajali qator deyiladi, bundagi a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ..., o'zgarmas sonlar qatorning koeffitsiyentlari deyiladi. Bu $x-a$ ikkihadning darajalari bo'yicha joylashgan darajali qatordir.

$a=0$ bo'lsa, x ning darajalari bo'yicha joylashgan qatorni hosil qilamiz. (1) qatorning yaqinlashish sohasini aniqlash uchun $x-a$ ni t bilan almashtiramiz:

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n + \ldots \qquad (2)$$

bu qator yaqinlashish intervaliga ega bo'lsin. Bu holda t ning $-R<x-a<R$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida (1) qatorning yaqinlashuvchanligi kelib chiqadi. $|t|>R$ bo'lganda, (2) qator uzoqlashuvchi bo'lganligi uchun $|x-a|>R$ bo'lganda (1) qator ham uzoqlashadi. Bundan ko'rinadiki, (1) qatorning yaqinlashish intervali markazi a nuqtada va uzunligi $2R$ bo'lgan intervaldan iborat bo'ladi. Bu intervalning tashqarisida esa uzoqlashuvchidir. Yaqinlashish intervalining oxirlarida yaqinlashish yoki uzoqlashish ro'y berishi mumkin.

M i s o l. $\frac{(x-2)}{1\cdot 2} + \frac{(x-2)^2}{2\cdot 2^2} + \frac{(x-2)^3}{3\cdot 2^3} + \ldots + \frac{(x-2)^n}{n\cdot 2^n} + \ldots$ qatorning yaqinlashish sohasini toping.

Y e c h i s h. $x-2=t$ deb olsak, qator tubandagi ko'rinishni oladi: $\frac{t}{1\cdot 2} + \frac{t^2}{2\cdot 2^2} + \frac{t^3}{3\cdot 2^3} + \ldots + \frac{t^n}{n\cdot 2^n} + \ldots$ bu qatorni absolut qiymatlaridan tuzilgan $\frac{|t|}{1\cdot 2} + \frac{|t^2|}{2\cdot 2^2} + \frac{|t^3|}{3\cdot 2^3} \ldots + \frac{|t^n|}{n\cdot 2^n} + \ldots$ qatorni qaraymiz.

Dalamber alomatini qo'llaymiz:

$$U_n = \frac{|t^n|}{n\cdot 2^n}; \quad U_{n+1} = \frac{|t^{n+1}|}{(n+1)\cdot 2^{n+1}};$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|t^{n+1}|\cdot n\cdot 2^n}{|t^n|(n+1)2^{n+1}} = \frac{|t|}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{|t|}{2}.$$

Dalamber alomatiga ko'ra $\frac{|t|}{2} < 1$ bo'lsa, qator yaqinlashadi, $\frac{|t|}{2} > 1$ bo'lsa, uzoqlashadi. Demak, berilgan qator $\frac{|x-2|}{2} < 1$ bo'lganda yaqinlashuvchi va $\frac{|x-2|}{2} > 1$ bo'lganda uzoqlashuvchidir. Bundan ko'rinadiki, berilgan qator markazi $a=2$ nuqtada bo'lgan $0<x<4$ intervalda yaqinlashadi.

Endi intervalning oxirida qatorning yaqinlashishiga tekshiramiz: $x=0$ bo'lganda $+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n}+\ldots$ ko'rinishdagi qatorga ega bo'lamiz. Bu ishoralari navbatlashuvchi qator bo'lib, shartli yaqinlashuvchidir. $x=4$ bo'lsa, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ ko'rinishdagi garmonik qatorga ega bo'lamiz, bu esa uzoqlashuvchi qator. Shunday qilib, berilgan qator $0\leq x\leq 4$ shartni qanoatlantiruvchi barcha x larda yaqinlashadi.

9.2.6. ELEMENTAR FUNKSIYALAR UCHUN TEYLOR VA MAKLOREN QATORLARI

Aytaylik, $f(x)$funksiya yaqinlashish intervali $a-R<x<a+R$ bo'lgan $f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+a_3(x-a)^3+\ldots+a_n(x-a)^n+\ldots(1)$ darajali qatorning yig'indisidan iborat bo'lsin. Bunday holda $f(x)$ funksiya a nuqta atrofida yoki $x-a$ ning darajalari bo'yicha *yoyiladi* deyiladi.

Darajali qatorning a_0, a_1, ..., a_n,... koeffitsiyentlarini topamiz. Buning uchun esa darajali qatorni yaqinlashish intervalida ketma-ket differensiallashdan foydalanamiz. Yaqinlashish intervalidagi ixtiyoriy x uchun quyidagi ayniyatlarni hosil qilamiz:

$$f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots+a_n(x-a)^n+a_{n+1}(x-a)^{n+1}+\ldots$$
$$f'(x)=a_1+2a_2(x-a)+3a_3(x-a)^2+\ldots+na_n(x-a)^{n-1}(n+1)a_{n+1}x^n+\ldots$$
$$f''(x)=2a_2+2\cdot 3a_3(x-a)+3\cdot 4a_4(x-a)^2+\ldots+n(n-1)a_n(x-a)^{n-2}+$$
$$+n(n+1)a_{n+1}(x-a)^{n-1}+\ldots$$

$$f^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2a_n+(n+1)n(n-1)\ldots 3\cdot 2a_{n+1}(x-a)\ldots$$

Bu ayniyatlarda $x=a$ desak, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$f(a)=a_0,\ f'(a)=a_1,\ f''(a)=2a_2,\ f'''(a)=2\cdot 3a_3,$$
$$f^{(n)}(a)=n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot a_n,\ldots$$

bulardan foydalanib, a_0, a_1, ...a_n koeffitsiyentlarni topamiz:

$$a_0=f(a),\ a_1=f'(a),\ a_2=\frac{f''(a)}{2},\ a_3=\frac{f'''(a)}{2\cdot 3},\ldots,\ a_n=\frac{f^{(n)}}{?}$$

$$a_0=f(a),\quad a_1=\frac{f'(a)}{1!},\ a_2=\frac{f''(a)}{2!},\ a_3=\frac{f'''(a)}{3!},\ldots,\ a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!},\ldots.$$

Koeffitsiyentlarning topilgan qiymatlarini (1) ga qo'ysak, tubandagi ifodaga ega bo'lamiz:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$

Bundan ko'rinadiki, $f(x)$ funksiya $x-a$ ning darajalari bo'yicha darajali qatorga yoyilsa, u holda bu qator quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots \tag{2}$$

(2) qator $f(x)$ funksiya uchun *Teylor qatori* deb ataladi.

Xususiy holda, $a=0$ bo'lsa, (2) qator

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \tag{3}$$

ko'rinishni oladi. (3) ko'rinishdagi qator $f(x)$ funksiya uchun *Makloren qatori* deyiladi.

Teorema. (Isbotsiz keltiramiz.) *$f(x)$ funksiya a nuqtada cheksiz differensiallanuvchi bo'lsin. Bu nuqta uchun tuzilgan Teylor qatorining yig'indisi bo'lishi uchun $R_n(x)$ qoldiq had $n\to\infty$ da nolga intilishi zarur va yetarlidir.*

Teorema bajarilsa, Teylor qatori yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi $f(x)$ ga teng bo'ladi.

9.2.7. ELEMENTAR FUNKSIYALARNI QATORLARGA YOYISH MISOLLARI

Ayrim elementar funksiyalarni qatorlarga yoyishni qaraymiz.

1-misol. $f(x)=\sin x$ funksiyani Makloren qatoriga yoying.

Yechish. (3) formulani qo'llab,

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+R_{2n}$$

ga ega bo'lamiz.

$\lim\limits_{n\to\infty} R_{2n}(x) = 0$ ekanligi isbotlanadi.

Demak, $\sin x$ ning Makloren qatoriga yoyilmasi

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \qquad (1)$$

ko'rinishda ekan.

x har qanday bo'lganda ham, qoldiq had nolga intilgani uchun berilgan qator yaqinlashadi va x istagancha bo'lganda ham funksiyaning yig'indisi $\sin x$ bo'ladi.

2-m i s o l. $f(x)=e^x$ funksiyani Makloren qatoriga yoying.

Y e c h i s h. (3) formulani tatbiq etamiz:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (2)$$

agar x ning o'rniga $-x$ olinsa, u holda

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

bo'ladi.

3-m i s o l. $f(x)=\cos x$ funksiyani Makloren qatoriga yoying.

Y e c h i s h. (3) formuladan foydalanib tubandagiga ega bo'lamiz:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \qquad (3)$$

4-m i s o l. $\ln(1+x)$ funksiyani Makloren qatoriga yoying.

Y e c h i s h. Buning uchun $\frac{1}{1+x}$ funksiyani Makloren qatoriga yoyilmasi $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots$ dan foydalanamiz.

Bu yoyilmani ($|x|<1$) bo'lganda 0 dan x gacha chegarada integrallaymiz:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \ldots)dt,$$

bundan

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots \qquad (4)$$

Bu tenglik $(-1;1)$ intervalda o'rinlidir. Agar bu formuladagi x ni $-x$ ga almashtirsak, $(-1,1)$ intervalda yaqinlashuvchi qator hosil bo'ladi:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots \qquad (5)$$

(4) va (5) formulalar yordamida 0 bilan 2 orasidagi sonlarning logarifmlarini hisoblash mumkin. Funksiyalarni Teylor qatoriga yoyishdan foydalanib, x turli qiymatlar olganda elementar funksiyalarning qiymatlarini hisoblash mumkin.

Masalan, $\cos 10°$ ni 10^{-5} gacha aniqlik bilan hisoblaylik.

$10°$ yoki radianda $\frac{\pi}{18} \approx 0{,}174533$ bo'lgani uchun

$$\cos 10° = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^4 - \frac{1}{6!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^6 + \ldots$$

Birinchi uchta had bilan chegaralanamiz:

$$\cos\frac{\pi}{18} \approx \frac{\pi}{18} - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^4.$$

Bunda biz absolyut qiymat jihatidan tashlab yuborilgan hadlarining birinchisidan kichik bo'lgan δ xatoga yo'l qo'yamiz:

$$\delta < \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^4 < \frac{1}{24}(0,4)^4 < 0{,}0000016 < 10^{-5};$$

$$\cos\frac{\pi}{18} \approx 0{,}015289.$$

9.2.8. ANIQ INTEGRALLARNI QATORLAR YORDAMIDA HISOBLASH

Boshlang'ich funksiyalarini elementar funksiyalar bilan ifodalab bo'lmaydigan e^{-x^2}, $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\cos x}{x}$, $\frac{1}{\ln x}$,... funksiyalarning aniq integrallarini qatorlar yordamida hisoblash mumkin.

1-m i s o l. $\int_0^a e^{-x^2}dx$ integralni hisoblang.

Y e c h i s h. Bu integralni hisoblash uchun e^x ning yoyilmasidagi x ni $-x^2$ ga almashtirib, integral ostidagi funksiyani qatorga yoyamiz:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots(-1)^n\frac{x^{2n}}{n} + \ldots$$

Bu tenglikning ikkala tomonini 0 dan a gacha chegaralarda integrallab, quyidagini topamiz:

$$\int_0^a e^{-x^2}dx = \left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1!\cdot 3} + \frac{x^5}{2!\cdot 5} - \frac{x^7}{3!\cdot 7} + \ldots\right)\Bigg|_0^a = \frac{a}{1} - \frac{a^3}{1!\cdot 3} + \frac{a^5}{2!\cdot 5} - \frac{a^7}{3!\cdot 7} + \ldots$$

Bu tenglik yordamida a ning istalgan qiymatida berilgan integralni ixtiyoriy darajada aniqlik bilan hisoblay olamiz.

2-m i s o l. $\int_0^a \frac{\sin x}{x}dx$ integralni hisoblang.

Y e c h i s h. Integral ostidagi funksiyani qatorga yoyamiz:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Bu tenglikning ikkala tomonini x ga bo‘lsak,

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots$$

qatorni hosil qilamiz. Bu qator esa x ning barcha qiymatlarida yaqinlashadi.

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x}dx = a - \frac{a^3}{3!\cdot 3} + \frac{a^5}{5!\cdot 5} - \frac{a^7}{7!\cdot 7} + \ldots$$

a har qanday bo‘lganda ham qatorning yig‘indisini istalgan darajada aniqlik bilan hisoblash mumkin. Qolgan funksiyalarning aniq integrallarini yuqoridagilarga o‘xshatib hisoblash mumkin.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Qanday qator funksional qator deyiladi?
2. Funksional qatorning yaqinlashishi, yaqinlashish sohasi deganda nimani tushunasiz?
3. Darajali qator deb qanday qatorga aytiladi?.
4. Darajali qatorning yaqinlashishi to‘g‘risida Abel teoremasini ifodalang.
5. Darajali qatorni hadlab differensiallash va integrallash to‘g‘risidagi teoremani ifodalang.
6. Berilgan funksiya uchun qanday darajali qator Teylor qatori deyiladi? Uning koeffitsiyentlari qanday hisoblanadi?
7. Teylor qatorining qoldiq hadi formulasini yozing.
8. Qanday darajali qator Makloren qatori deyiladi va uning koeffitsiyentlari qanday hisoblanadi?
9. Darajali qatorlarni taqribiy hisoblashlarga tatbiqiga misollar keltiring.

9.3. FURE QATORLARI

9.3.1. $T=2\pi$ DAVRIY FUNKSIYA UCHUN FURE QATORI

Biz oldingi mavzularda funksiyalarni darajali funksiyalarga, shuningdek, murakkabroq funksiyalarni esa sodda ko'rinishdagi darajali funksiyalarga yoyish mumkinligini ko'rdik. Ammo ayrim davriy jarayonlarni talqin etishda shu jarayonlarni ifodalovchi oddiy davriy sinus va kosinus funksiyalari bo'yicha qatorlarga yoyish qulaydir.

Davri 2π bo'lgan $f(x)$ funksiyani quyida ko'riladigan trigonometrik qatorga yoyish masalasini qaraymiz.

Ta'rif. Ushbu

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\ldots+$$

ko'rinishdagi funksional qator yoki ixchamroq yozilgan

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (1)$$

qator *trigonometrik qator* deyiladi. $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ $(n=1,2,3\ldots)$ o'zgarmas sonlar trigonometrik qatorning *koeffitsiyentlari*, $\frac{a_0}{2}$ esa *ozod had* deyiladi.

Agar (1) qator yaqinlashsa, uning yig'indisi davri 2π bo'lgan, davriy $f(x)$ funksiya bo'ladi, chunki $\sin x$ va $\cos x$ davri 2π bo'lgan davriy funksiyalardir. Shunga ko'ra: $f(x)=f(x+2\pi)$.

Endi tubandagicha masala qo'yaylik: Bizga davri 2π bo'lgan $f(x)$ davriy funksiya berilgan bo'lsin. Shu $f(x)$ uchun berilgan funksiyaga yaqinlashuvchi trigonometrik qator topish mumkinmi yoki yo'qmi? Aytaylik, davri 2π bo'lgan $f(x)$ davriy funksiya $[-\pi;\pi]$ kesmada shu funksiyaga yaqinlashuvchi trigonometrik qatorni ifodalasin, ya'ni shu qatorning yig'indisi bo'lsin:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \qquad (2)$$

Bu tenglikning chap tomonidagi funksiyadan olingan integral qator hadlaridan olingan integrallarning yig'indisiga teng, deb faraz qilamiz. Bundan esa berilgan trigonometrik qatorning koeffitsiyentlarini hisoblash uchun foydalaniladi. (2) tenglikning ikkala tomonini $-\pi$ dan π gacha chegaralarda integrallaymiz:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nxdx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin xdx \right). \qquad (3)$$

O‘ng tomondagi integrallarni hisoblaymiz:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\, dx = \pi a_0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nxdx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx = \frac{a_n \sin x}{n} \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nxdx = b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nxdx = -\frac{b_n \cos nx}{n} \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Demak, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \pi a_0; \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$ (4)

Qatorning qolgan koeffitsiyentlarini hisoblash uchun quyidagi aniq integrallarni qarab chiqamiz. Agar n va k butun son bo‘lsa, quyidagi tengliklar o‘rinlidir:

Agar $n \neq k$ bo‘lsa, $\left. \begin{array}{l} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kxdx = 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kxdx = 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kxdx = 0 \end{array} \right\}$ (5)

agar $n = k$ bo‘lsa, $\left. \begin{array}{l} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kxdx = \pi \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos kxdx = 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kxdx = \pi \end{array} \right\}$ (6)

(5) va (6) ifodalarning to‘g‘riligini bizga ma’lum bo‘lgan

$$2\cos nx \cos kx = \cos(n+k)x + \cos(n-k)x,$$

$$2\sin nx \cos kx = \sin(n+k)x + \sin(n-k)x$$

trigonometrik formulalardan foydalanib ko‘rsatish mumkin.

1-guruhdagi birinchi integralni hisoblaymiz:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+k)x dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-k)x dx = 0.$$

Endi (2) qatorning a_k va b_k koeffitsiyentlarini hisoblaymiz. a_k koeffitsiyentni hisoblash uchun (2) qatorning ikkala tomonini coskx ga ko‘paytiramiz:

$$f(x)\cos kx = \frac{a_0}{2}\cos kx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx \cos kx + b_n \sin nx \cos kx). \quad (7)$$

Tenglikning o‘ng tomonida hosil qilingan qator kuchaytirilgandir, chunki, uning hadlari absolut qiymati bo‘yicha (3) yaqinlashuvchi musbat qatorning hadlaridan katta bo‘la olmaydi.

Shuning uchun uni istalgan kesmada hadlab integrallash mumkin. (7) ni $-\pi$ dan π gacha chegaralarda integrallaymiz:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx dx\right). \quad (8)$$

Yuqoridagi (5) va (6) larni hisobga olsak, (8) tenglikni o‘ng tomonidagi a_k koeffitsiyentli integraldan boshqa hamma integrallarning nolga teng ekanligini ko‘ramiz. Demak,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = a_k\pi;$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx; \quad k \in \mathrm{N}. \quad (9)$$

Xuddi shunga o‘xshash, (2) qatorning ikkala tomonini sinkx ga ko‘paytirib integrallasak, b_k ni topamiz:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx; \quad k \in \mathrm{N}\,. \tag{10}$$

Aniqlangan koeffitsiyentlar Fure koeffitsiyentlari deb ataladi. Shunday koeffitsiyentli (1) trigonometrik qator esa $f(x)$ funksiyaning Fure qatori deyiladi.

Fure qatoriga qanday funksiyalarni yoyish mumkin, degan savolga quyidagi ta'rif javob beradi.

Ta'rif. Agar $[a; b]$ kesmani chekli sondagi $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ nuqtalar bilan shunday $(a_1; x_1)$, $(x_1; x_2)$, ..., $(x_{n-1}; b)$ intervallarga bo'lish mumkin bo'lsaki, bunda, $f(x)$ funksiya monoton, ya'ni o'smaydigan va kamaymaydigan bo'lsa, $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada *bo'lakli monoton* deb ataladi.

Agar $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada bo'lakli monoton va chegaralangan bo'lsa, ta'rifga asosan bu funksiya faqat birinchi tur uzilish nuqtasiga ega bo'lishi kelib chiqadi. Bunday funksiyalarni Fure qatoriga yoyish mumkin.

Funksiyalarni Fure qatoriga yoyishga misollar ko'ramiz.

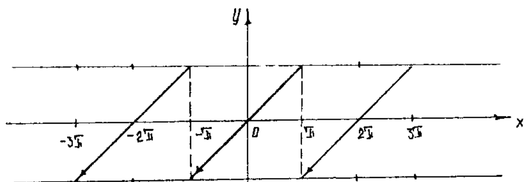
1-misol. Davri 2π bo'lgan $f(x)$ davriy funksiya quyidagicha aniqlangan: $f(x)= x - \pi < x < \pi$ (134-chizma).

Yechish. Bu funksiya bo'lakli monoton va chegaralangan. Demak, uni Fure qatoriga yoyish mumkin.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0\,;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left[x\frac{\sin x}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin x dx = 0\right];$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x dx = \frac{1}{\pi}\left[x\frac{\cos x}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos x dx\right] = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}\,.$$



134-chizma.

Shunday qilib, quyidagi qatorni hosil qilamiz:

$$f(x)=2\left[\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\ldots-(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}\right].$$

2-misol. Davri 2π bo'lgan $f(x)$ davriy funksiya quyidagicha aniqlangan:

$-\pi \le x \le 0$ bo'lsa, $f(x)=-x$;

$0 < x \le \pi$ bo'lsa, $f(x)=x$, ya'ni $f(x)=|x|$.

Yechish. Bu funksiya ham $-\pi \le x \le 0$ kesmada bo'lakli, monoton (135-chizma). Uning Fure koeffitsiyentlarini aniqlaymiz:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)dx+\int_{0}^{\pi} xdx\right]=\pi;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}(-x)\cos nxdx+\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nxdx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\sin x}{n}\Bigg|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{n}\int_{\pi}^{0}\sin xdx+\frac{x\sin x}{n}\Bigg|_{0}^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\sin nxdx\right]=$$

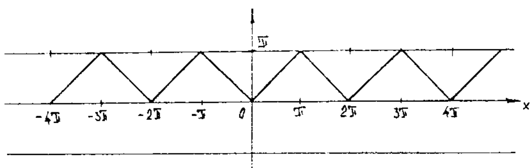
$$=\frac{1}{\pi n}\left[-\frac{\cos x}{n}\Bigg|_{-\pi}^{0}+\frac{\cos x}{n}\Bigg|_{0}^{\pi}\right]=\frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi-\alpha)=$$

$$=\begin{cases}0, & \text{agar } n \text{ juft bo'lsa;}\\ -\dfrac{4}{\pi n^2}, & \text{agar } n \text{ toq bo'lsa;}\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\sin nxdx+\int_{0}^{\pi} x\sin nxdx\right]=0.$$

Shunday qilib, quyidagi qatorni hosil qilamiz:

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2}-\frac{\cos 3x}{2^2}+\frac{\cos 5x}{3^2}+\ldots+\frac{\cos(2p+1)x}{n^2}+\ldots\right].$$



135-chizma.

Bu qator hamma nuqtalarda yaqinlashadi va uning yig'indisi berilgan funksiyaga teng.

9.3.2. JUFT VA TOQ FUNKSIYALAR UCHUN FURE QATORI

Oldingi mavzudagi misollardan ko'rinadiki, toq funksiyalar uchun Fure qatori o'zida sin$x$ qatnashgan hadlarga ega bo'ladi, juft funksiyalar uchun Fure qatori esa ozod had va cos$x$ qatnashgan hadlarga ega bo'lar ekan. Bu tasdiqni umumiy holda quyidagi lemma ko'rsatib beradi.

Lemma. *Agar integrallanuvchi* $f(x)$ $(x \in [-l, l])$ *funksiya toq bo'lsa, u holda* $\int_{-l}^{l} f(x)dx = 0$ (1), *agar funksiya juft bo'lsa,* $\int_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int_{0}^{l} f(x)dx$ (2) *munosabatlar o'rinli bo'ladi.*

I s b o t. Aniq integral xossalariga ko'ra:

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{0}^{l} f(x)dx + \int_{-l}^{0} f(x)dx .$$

Ikkinchi integralda o'zgaruvchini almashtiramiz: $x= -t$, u holda $\int_{-l}^{l} f(x)dx = -\int_{l}^{0} f(-t)dt = \int_{0}^{l} f(t)dt$ bo'ladi.

Bundan esa $\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{l}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{l} f(-x)dx$ (3) (keyingi integralda oldingi o'zgaruvchiga o'tdik). (3) formuladan ko'rinadiki, agar $f(x)$ toq bo'lsa, (1) tenglik, agar $f(x)$ juft bo'lsa, (2) tenglik o'rinli. Lemmadan ko'rinadiki: agar $f(x)$ — toq funksiya Fure qatoriga yoyilsa, $f(x)\cos kx$ ko'paytma toq funksiya, $f(x)\sin kx$ esa juft funksiya bo'ladi. Demak,

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0; \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx = 0, \\ b_k &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

ya'ni toq funksiyaning Fure qatori faqat sinuslarni o'z ichiga oladi. Agar juft funksiya Fure qatoriga yoyilsa, $f(x)\sin kx$ ko'paytma toq, $f(x)\cos kx$ esa juft funksiya bo'ladi:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0;\ a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kxdx; \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kxdx = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

ya'ni juft funksiyalarning Fure qatori faqat kosinuslarni o'z ichiga oladi. Bu formulalar berilgan funksiya juft yoki toq bo'lgan hollarda Fure koeffitsiyentlarini topishdagi hisoblashlarni soddalashtirishga imkon beradi.

Misol. Davri 2π bo'lgan va $[0;\pi]$ kesmada $y=x$ tenglik bilan berilgan $f(x)$ davriy juft funksiyani Fure qatoriga yoying.

Yechish. (5) formulaga asosan, k har qanday bo'lganda ham $b_k = 0$,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} dx = \pi,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kxdx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin kx}{k} + \frac{\cos kx}{k^2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k^2}\left((-1)^k - 1\right) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{agar } k \text{ juft bo'lsa;} \\ -\dfrac{4}{\pi k^2}, & \text{agar } k \text{ toq bo'lsa.} \end{cases}$$

9.3.3. FURE QATORINING YAQINLASHISHI

Biz birinchi mavzudagi (4), (5), (6) formulalarni keltirib chiqarishda $f(x)$ funksiya yaqinlashuvchi trigonometrik qatorga yoyiladi, deb faraz qilgan edik.

Agar shunday faraz qilmasdan a_0, a_k, b_k koeffitsiyentlarni hisoblab, berilgan funksiyaning Fure qatoridan iborat bo'lgan trigonometrik qatorni tuzsak, bu tuzilgan Fure qatori yaqinlashuvchi bo'ladimi yoki yo'qmi, degan savol tug'iladi. Agar bu qator yaqinlashuvchi bo'lsa, ana shu qatorning koeffitsiyentlarini hisoblash uchun foydalanilgan formulalar shu $f(x)$ funksiyaga yaqinlashadi desa bo'ladimi? Bu savolga tubandagi ta'rif va teorema javob bo'ladi.

Ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya aniqlangan $[a;\, b]$ kesmani chekli sondagi kesmachalarga bo'lish mumkin bo'lib, bu kesmachalarning har birining ichida bu funksiya faqat o'sadigan yoki faqat kamayadigan yoki o'zgarmas bo'lsa, $f(x)$ funksiya bu kesmada *bo'lakli-monoton* deyiladi.

Teorema (isbotsiz keltiriladi). *Davri 2π bo'lgan davriy $f(x)$ funksiya $[a;\, a+2\pi]$ kesmada cheklangan va bo'lakli-monoton bo'lsa, u holda Fure qatori butun $x\in R$ nuqtalarda yaqinlashuvchi bo'ladi, bu yerda* $a \in$ R. *Shuning bilan birga u $f(x)$ funksiyaning uzluksiz nuqtalarida $f(x)$ ning o'ziga, uzilish nuqtalarida esa chap va o'ng limit qiymatlarining o'rta arifmetik qiymatiga, ya'ni*

$$\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to x_{0-0}} f(x)+\lim_{x\to x_{0+0}} f(x)\right] \text{ ga teng.}$$

9.3.4. DAVRI 2*L* BO'LGAN FUNKSIYALAR UCHUN FURE QATORLARI

$f(x)$ funksiya davri $2l$, umuman aytganda, 2π dan farqli bo'lgan davriy funksiya bo'lsin. Uni Fure qatoriga yoyamiz. Buning uchun o'zgaruvchini $x=\frac{l}{\pi}t$ formula bilan aniqlaymiz.

U holda $f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$ funksiya t ning davri 2π bo'lgan davriy funksiyasi bo'ladi. Uni $-\pi \le x \le \pi$ kesmada Fure qatoriga yoyish mumkin:

$$f\left(\frac{l}{\pi}t\right)=\frac{a_0}{2}+\sum(a_n\cos kt+b_k\sin kt), \quad \text{bunda} \quad a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}\right)dt\ ;$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\cos ktdt\ ;\ b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\sin ktdt.$$

Endi x o'zgaruvchiga qaytamiz:

$$x=\frac{l}{\pi}t;\quad t=\frac{x\pi}{l}\ ;\ dt=\frac{\pi}{l}dx\,.$$

U holda quyidagilarni hosil qilamiz:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx;\qquad \left.\begin{aligned} a_k&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos kt\frac{\pi x}{l}dx;\\ b_k&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin kt\frac{\pi kx}{l}dx.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Yuqoridagi formula esa quyidagi ko'rinishni oladi:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi}{l}x + b_k \sin\frac{k\pi}{l}x\right). \qquad (2)$$

Bu qator davri $2l$ bo'lgan funksiyalar uchun Fure qatori deyiladi.

M i s o l. $-1<x \le 1$ intervalda $f(x)=x-1$ formula bilan berilgan $2l=2$ davrli funksiyani Fure qatoriga yoying (136-chizma).

Y e c h i s h. Fure koeffitsiyentlarini (2) formulalar bo'yicha ($l=1$ deb) topamiz:

$$a_0 = \int_{-1}^{1}(x-1)\,dx = \frac{(x-1)^2}{2}\Bigg|_{-1}^{1} = -2;$$

$$a_k = \int_{-1}^{1}(x-1)\cos k\pi x dx = \int_{-1}^{1} x\cos k\pi x dx - \int_{-1}^{1}\cos k\pi x dx = \frac{x\sin k\pi x}{k\pi}\Bigg|_{-1}^{1} -$$

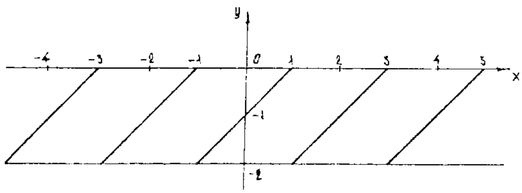
$$-\int_{-1}^{1}\frac{\sin k\pi x}{k\pi}dx - \frac{\sin k\pi x}{k\pi}\Bigg|_{-1}^{1} = 0;$$

$$b_k = \int_{-1}^{1}(x-1)\sin k\pi x dx = \int_{-1}^{1} x\sin k\pi x dx - \int_{-1}^{1}\sin k\pi x dx = -\frac{x\sin k\pi x}{k\pi}\Bigg|_{-1}^{1} +$$

$$+\int_{-1}^{1}\frac{\cos k\pi x}{k\pi}dx - \frac{\cos k\pi x}{k\pi}\Bigg|_{-1}^{1} = -\frac{1}{k\pi}\left[\cos k\pi + \cos(-k\pi)\right] + \frac{\sin k\pi x}{k^2\pi^2}\Bigg|_{-1}^{1} +$$

$$+\frac{1}{k\pi}\left[\cos k\pi - \cos(-k\pi)\right] = -\frac{2(-1)^k}{k\pi}.$$

Shunday qilib, $a_0=-2$; $a_k=0$; $b_k = -\frac{2(-1)^k}{k\pi}$. b_k koeffitsiyentni yoysak, tubandagi ko'rinishda bo'ladi: $b_1 = \frac{2}{\pi}$; $b_2 = -\frac{2}{2\pi}$; $b_3 = \frac{2}{3\pi}$; ...



136-chizma.

U holda berilgan $f(x)=x-1$ funksiya uchun Fure qatori

$$-1+\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}+\ldots\right]$$

ko'rinishda bo'ladi.

Juft va toq funksiyalarning Fure koeffitsiyentlari uchun chiqarilgan 2-mavzudagi (4) va (5) formulalar $2l$ davriy funksiya uchun quyidagi ko'rinishga keladi:

Toq funksiya uchun: $a_0=a_k=0;\ b_k=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx.$ (3)

Juft funksiya uchun:

$$a_0=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)dx;\quad a_k=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cos\frac{k\pi}{l}x\,dx;\quad b_k=0. \qquad (4)$$

Bu holda Fure qatorlari mos ravishda $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{\pi n}{l}x$ (5) (toq funksiya uchun) va $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{\pi n}{l}x$ (6) (juft funksiya uchun) ko'rinishda bo'ladi.

9.3.5. DAVRIY BO'LMAGAN FUNKSIYALARNI FURE QATORIGA YOYISH HAQIDA

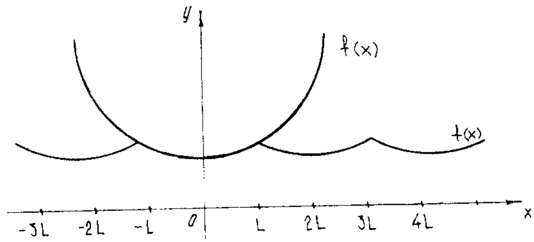
Nodavriy funksiyani Fure qatoriga yoyish masalasini qarab chiqamiz. $f(x)$ butun son o'qida berilgan nodavriy funksiya bo'lsin. Trigonometrik qatorning yig'indisi davriy funksiya bo'lgani uchun, berilgan nodavriy funksiyani Fure qatoriga yoyib bo'lmaydi.

Bu funksiyani $-l<x\le l$ intervalda tekshiramiz va yig'indisi shu funksiyaga teng bo'lgan Fure qatorini qurishga harakat qilib ko'ramiz. Buning uchun davri $2l$ bo'lgan va $-l<x\le l$ intervalda qiymati $f(x)$ funksiyaning qiymatiga teng bo'lgan yordamchi $\varphi(x)$ funksiyani qaraymiz (137-chizma).

Agar $\varphi(x)$ funksiya uchun 3-mavzudagi teoremaning shartlari bajarilsa, uni tegishli Fure qatori yordamida tasvirlash mumkin.

$-l<x\le l$ intervaldagi bu qator funksiyaning barcha uzluksizlik nuqtalarida $\varphi(x)=f(x)$ yig'indiga ega bo'ladi.

Ayrim hollarda faqat $0<x\le l$ intervalda berilgan funksiya bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi.



137-chizma.

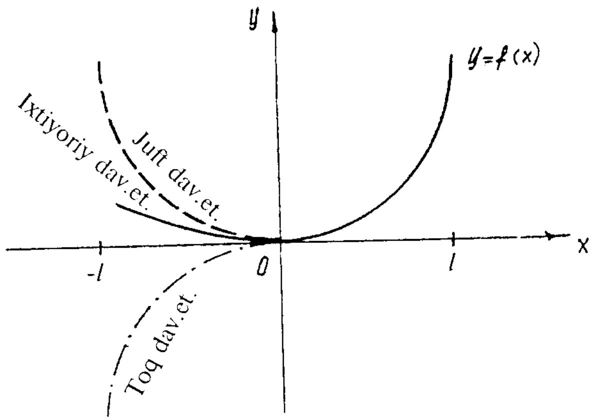
Bunday holda biz funksiyani biror qonun bo'yicha intervalda davom ettirishimiz, so'ngra uni butun son o'qiga $2l$ davr bilan davriy davom ettirishimiz mumkin.

Ko'pincha funksiya juft yoki toq tarzda davom ettiriladi.

Agar funksiya juft, ya'ni $f(-x) = f(x)$ tarzda davom ettirilayotgan bo'lsa, u holda Fure qatori faqat kosinuslar va ozod haddan iborat bo'ladi.

Agar funksiya toq, ya'ni $f(-x) = -f(x)$ tarzda davom ettirilayotgan bo'lsa, u holda qator faqat sinuslardan iborat bo'ladi.

Shunday qilib, agar funksiya $0 < x \leq l$ intervalda berilgan bo'lsa, u holda uni $-l < x \leq 0$ intervalga, so'ngra hosil qilingan funksiyani butun son o'qiga davriy davom ettirib cheksiz ko'p Fure qatorlarini hosil qilishimiz mumkin. Biroq, bu barcha qatorlar $[0; l]$ intervalda birgina berilgan $f(x)$ funksiyani ifodalaydi, $[-l; 0]$ intervalda esa har qaysi qatorning yig'indisi $f(x)$ funksiyaning tegishli davom ettirilishidan iborat bo'ladi (138-chizma).



138-chizma.

1-m i s o l. $f(x)=x$ funksiyaning $[0; \pi]$ kesmada sinuslar bo'yicha qatorga yoyish talab qilinsin.

Y e c h i s h. Bu funksiyani toq holda davom ettirib, $x = 2\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right]$ qatorni hosil qilamiz.

2-m i s o l. $f(x)=x$ funksiyani $[0; \pi]$ kesmada kosinuslar bo'yicha qatorga yoying.

Bu funksiyani juft holda davom ettirib, $-\pi < x \leq \pi$ bo'lganda $f(x)=|x|$ tenglikni hosil qilamiz:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} + \ldots\right].$$

Shunday qilib, $[0; \pi]$ kesmada quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} + \ldots\right].$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. $T = 2\pi$ davriy funksiya uchun Fure qatorini yozing va tushuntiring.
2. Davri 2π bo'lgan ixtiyoriy funksiyani Fure qatoriga yoying.
3. Juft va toq funsiyalar uchun Fure qatorlarini yozing.
4. Davri $2\,l$ bo'lgan funksiyalar uchun Fure qatorlariga misollar keltiring.
5. Davriy bo'lmagan funksiyalarni Fure qatoriga yoyishni tushuntirib bering.

10-bob. BIR NECHA O'ZGARUVCHILI FUNKSIYANING DIFFERENSIAL HISOBI

10.1. BIR NECHA O'ZGARUVCHILI FUNKSIYA

10.1.1. BIR NECHA O'ZGARUVCHILI FUNKSIYA TUSHUNCHASIGA OLIB KELUVCHI MASALALAR

To'g'ri burchakli to'rtburchak tomonlarini x va y bilan belgilasak, u holda uning yuzi $S = x \cdot y$ formula bilan ifodalanadi. Bu holda S yuz x va y ning funksiyalari bo'ladi, boshqacha aytganda ikki o'zgaruvchiga bog'liq bo'ladi.

Shunga o'xshash, to'g'ri burchakli parallelepiped qirralarini x, y, z bilan belgilasak, uning hajmi $V = x \cdot y \cdot z$ formula bilan ifodalanadi. Bu holda V hajm x, y, z o'zgaruvchilarning funksiyasi bo'ladi.

Demak, V uch o'zgaruvchili funksiya. Tabiatda uchraydigan jarayonlarda ikki, uch emas, undan ortiq o'zgaruvchilarga bog'liq funksiyalar ham uchraydi. Biz faqat ikki o'zgaruvchili funksiya ustida to'xtalamiz.

10.1.2. IKKI O'ZGARUVCHILI FUNKSIYA

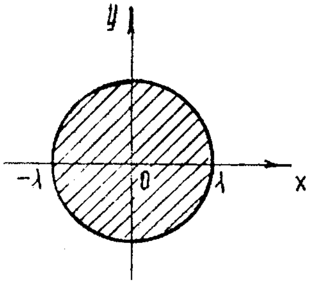
1-ta'rif. Agar bir-biriga bog'liq bo'lmagan ikki o'zgaruvchi x va y ning biror D o'zgarish sohasidagi har bir qo'sh (x, y) qiymatiga z miqdorning aniq bir qiymati mos kelsa, *z ikki erkli o'zgaruvchi x va y ning D sohada aniqlangan funksiyasi* deyiladi va $z = f(x, y)$; $z = F(x, y)$ ko'rinishda yoziladi.

Ikki o'zgaruvchili funksiya jadval yordamida yoki analitik formula yordamida ham berilishi mumkin.

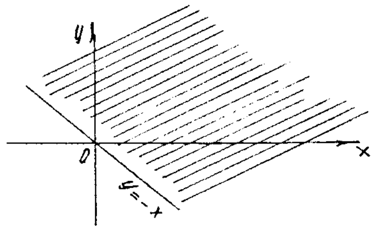
2-ta'rif. $z = f(x, y)$ funksiya aniqlangan x va y qo'sh (x, y) qiymatlarining to'plami funksiyaning *aniqlanish sohasi* deyiladi.

Ikki o'zgaruvchili funksiyaning aniqlanish sohasini geometrik tarzda tasvirlash oson. x va y ning har bir qo'sh qiymatini xOy tekislikda $M(x; y)$ nuqta bilan tasvirlasak, funksiyaning aniqlanish sohasi tekislikdagi nuqtalar to'plami bilan tasvirlanadi.

Funksiyaning aniqlanish sohasi xOy tekisligidan yoki uning bitta yoki bir nechta uzluksiz chiziqlar bilan chegaralangan qismlaridan ham iborat bo'lishi mumkin. Bu chiziqlarni sohaning *chegarasi* deyiladi. Sohaning chegarada yotmagan nuqtalari sohaning *ichki*



139-chizma.



140-chizma.

nuqtalari deyiladi. Faqat ichki nuqtalardan iborat bo‘lgan soha *ochiq* deyiladi. Agar sohaga chegara nuqtalari ham kirsa *yopiq* soha deyiladi. Agar shunday o‘zgarmas c son mavjud bo‘lsaki, koordinatalar boshi 0 dan sohaning istalgan M nuqtasigacha bo‘lgan masofa c dan kichik, ya’ni $|OM| < c$ bo‘lsa, soha *chegaralangan* deyiladi.

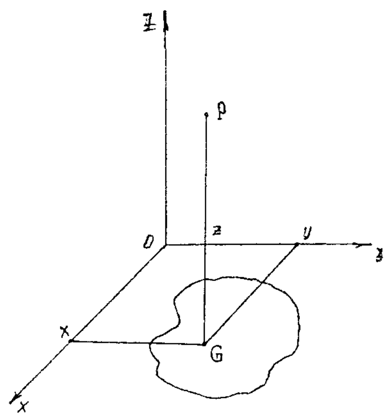
1-m i s o l. $z = 5x + 2y$ ifoda x va y ning har qanday qiymatida ma’noga ega, demak, aniqlanish sohasi butun xOy tekisligi bo‘ladi.

2-m i s o l. $x^2 + y^2 \leq 1$ funksiyaning aniqlanish sohasi markazi koordinatalar boshida, radiusi 1 ga teng doira nuqtalaridan iborat (139-chizma).

3-m i s o l. $z = \ln(x + y)$; $x + y > 0$; $y > -x$ (140-chizma).

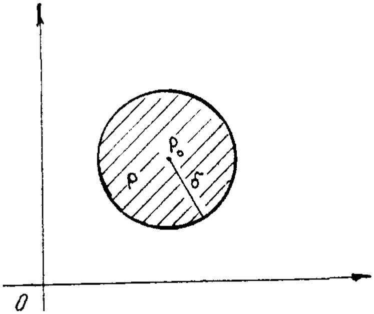
Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning geometrik tasvirini qaraylik. $Oxyz$ to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasini olaylik. $z = f(x, y)$ funksiya xOy tekisligidagi biror G sohada aniqlangan. G sohaning har bir $(x; y)$ nuqtasidan xOy tekisligiga perpendikular o‘tkazamiz va undan $z = f(x, y)$ga teng kesma ajratamiz. U holda fazoda koordinatalari x; y; $z = f(x, y)$ bo‘lgan P nuqtani hosil qilamiz. Koordinatalari $z = f(x, y)$ tenglamani qanoatlantiruvchi P nuqtalarning geometrik o‘rni ikki o‘zgaruvchili funksiyaning *grafigi* deb ataladi. Bu nuqtalar to‘plami esa fazoda biror sirtni aniqlaydi (141-chizma).

M i s o l. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ funksiya fazoda markazi koordinatalar boshida, radiusi 1 ga teng sharni ifodalaydi.



141-chizma.

10.1.3. IKKI O'ZGARUVCHILI FUNKSIYANING LIMITI



142-chizma.

Bir o'zgaruvchili $y = f(x)$ funksiyaning limitini tekshirishda nuqtaning atrofi tushunchasi kiritilganidek, bu yerda ham nuqta atrofi tushunchasini kiritamiz. Aytaylik, $z = f(x, y)$ funksiya xOy tekisligining biror G sohasida aniqlangan bo'lsin. G sohada yoki uning chegarasida yotgan $P_0(x_0; y_0)$ nuqtani qaraymiz. $P_0(x_0; y_0)$ nuqtaning *δ-atrofi* deb markazi shu nuqtada bo'lgan doiraning ichki nuqtalari to'plamiga aytiladi. Agar bu doiraning radiusi δ ga teng bo'lsa, u holda u nuqtaning δ- atrofi haqida gapirish mumkin (142-chizma).

$P_0(x_0; y_0)$ nuqtaning δ- atrofiga tegishli bo'lgan istalgan $P(x; y)$ nuqta $P_0(x_0; y_0)$ nuqtadan δ dan kichik masofada yotadi, ya'ni

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta.$$

Ta'rif. Agar $\forall\varepsilon > 0$ son olinganda ham, shunday $\delta > 0$ son topilsaki, $d((x; y), (x_0; y_0)) < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $(x; y) \in G$ nuqtalar uchun $|f(x, y - A)| < \varepsilon$ bo'lsa, u holda A son $f(x, y)$ funksiyaning $(x_0; y_0)$ nuqtadagi limiti deb ataladi va $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A$ kabi belgilanadi.

M i s o l. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ ni toping.

Y e c h i s h. Funksiyaning limiti $P(x; y) \to P_0(0; 0)$, ya'ni $d \to 0$ da topiladi, bu yerda $d = P_0P = \sqrt{x^2+y^2}$ (ikki nuqta orasidagi masofa, bunda P_0 nuqta koordinatalar boshi):

$$\lim_{P\to P_0} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \lim_{d\to 0} \frac{d^2}{\sqrt{d^2+1}-1} = \lim_{d\to 0} \frac{d^2\sqrt{d^2+1}+1}{d^2+1-1} = \lim_{d\to 0}(\sqrt{d^2+1}+1) = 2.$$

Bu yerda funksiya $P_0(0:0)$ nuqtada aniqlanmagan bo'lsa-da, limitga ega.

Bir o'zgaruvchili funksiya uchun limitlar haqidagi barcha asosiy teoremalar bir necha o'zgaruvchili funksiya uchun ham o'rinli bo'ladi.

10.1.4. IKKI O'ZGARUVCHILI FUNKSIYANING UZLUKSIZLIGI

Ta'rif. $z = f(x, y) = f(P)$ funksiya $P_0(x_0; y_0)$ nuqtada va uning atrofida aniqlangan bo'lsin. Agar $P(x; y)$ nuqta funksiyaning aniqlanish sohasida qolgan holda $P_0(x_0; y_0)$ nuqtaga ixtiyoriy usulda intilganda ushbu $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ tenglik mavjud bo'lsa, $z = f(x, y)$ funksiya $P_0(x_0; y_0)$ nuqtada *uzluksiz* deyiladi. Agar $x = x_0 + \Delta x$; $y = y_0 + \Delta y$ deb belgilasak:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} [f(x_0 + \Delta x, \quad y_0 + \Delta y)] = f(x_0, y_0) \text{ yoki}$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} [f(x_0 + \Delta x, \quad y_0 + \Delta y)] - f(x_0, y_0) = 0 \text{ yoki}$$

$$\lim_{\Delta P \to 0} \Delta z = 0; \quad \Delta \rho = \sqrt{(\Delta x^2) + (\Delta y)^2} \text{ deb belgilaymiz.}$$

$\Delta x \to 0, \quad \Delta y \to 0$ da $\Delta \rho \to 0$ va aksincha

$\Delta \rho \to 0$ bo'lsa, $\Delta x \to 0, \quad \Delta y \to 0.$

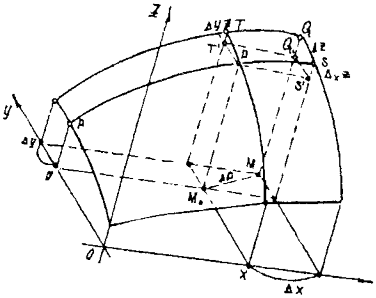
Agar biror $N(x_0; y_0)$ nuqtada (1) tenglik bajarilmasa, funksiya shu nuqtada uzilishga ega deyiladi. Uzilish bo'lishi uchun:

1) funksiya nuqtada aniqlanmagan bo'lishi;
2) limit mavjud bo'lmasligi;
3) limit ham mavjud, ammo $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x, y) \neq f(x_0, y_0)$ bo'lishi kerak.

10.1.5. FUNKSIYANING XUSUSIY VA TO'LA ORTTIRMASI

Funksiyaning xususiy va to'la orttirmasini ko'z oldimizga keltirish uchun chizmaga murojaat qilamiz.

$z = f(x, y)$ sirtning xOy tekisligiga parallel $y =$ const tekislik bilan kesishganidan hosil bo'lgan PS chiziqni qaraymiz. Bu tekislikda y



143-chizma.

o'zgarmas qiymatni saqlagani uchun (143-chizma), z faqat PS chiziq bo'ylab x ning o'zgarishiga bog'liq ravishda o'zgaradi.

x ga orttirma beramiz, bu orttirma z ning x *bo'yicha xususiy orttirmasi* deb ataladi va $\Delta_x z$ bilan belgilanadi:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x,\ y) - f(x,\ y). \qquad (1)$$

Shunga o'xshab, x o'zgarmas qiymatni saqlab, y ga Δy orttirma bersak, z ham orttirma oladi. Bu orttirma z ning y *bo'yicha xususiy* orttirmasi deyiladi:

$$\Delta_y z = f(x,\ y + \Delta y) - f(x,\ y). \qquad (2)$$

Biz argument x ga Δx orttirma va argument y ga Δy orttirma berib, z uchun yangi orttirma olamiz. Bu orttirma *z ning to'la orttirmasi* deyiladi:

$$\Delta z = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x,\ y). \qquad (3)$$

Bu orttirma chizmada QQ_1 bilan belgilangan. To'la orttirma, umuman aytganda, xususiy orttirmalar yig'indisiga teng emas:

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z.$$

M i s o l. $z = xy$.

$$\Delta_x z = (x + \Delta x)y - xy = y\Delta x;$$
$$\Delta_y z = (y + \Delta y)x - xy = x\Delta y;$$
$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y - \Delta x\Delta y.$$
$$x = 1,\ y = 2,\ \Delta x = 0{,}2,\ \Delta y = 0{,}3 \text{ bo'lsin},$$
$$\Delta_x z = 0{,}4,\ \Delta_y z = 0{,}3,\ \Delta z = 0{,}76; \quad 0{,}7 \neq 0{,}76.$$

10.1.6. IKKI O'ZGARUVCHILI FUNKSIYANING XUSUSIY HOSILALARI

Ta'rif. $z = f(x,\ y)$ funksiyaning x bo'yicha *xususiy hosilasi* deb xususiy orttirma $\Delta_x z$ ning Δx orttirmaga nisbatining Δx nolga intilgandagi limitiga aytiladi. Ta'rifga ko'ra:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

$z=f(x,\ y)$ funksiyaning x bo'yicha xususiy hosilasi ushbu belgilashlar bilan belgilanadi. z'_x, $f'_x(x,y)$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}$; y bo'yicha xususiy hosila ham shunga o'xshash topiladi va belgilanadi:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)}{\Delta y},$$

$$z'_y,\ f'_y(x,y),\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial z(x,\ y)}{\partial y}.$$

Demak, $z=f(x,\ y)$ funksiyaning x bo'yicha xususiy hosilasi deb y ni o'zgarmas faraz qilib, x bo'yicha topilgan, y bo'yicha xususiy hosilasi deb x ni o'zgarmas faraz qilib, y bo'yicha topilgan hosilaga aytiladi.

M i s o l. $z=x^2\sin y$ funksiyaning $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ xususiy hosilalarini toping.

Y e c h i s h.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sin y;$$

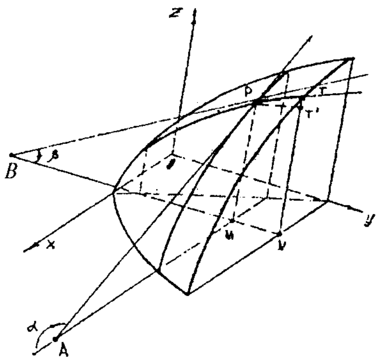
$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\cos y.$$

10.1.7. IKKI O'ZGARUVCHILI FUNKSIYA XUSUSIY HOSILALARINING GEOMETRIK MA'NOSI

Aytaylik, $z=f(x,\ y)$ — sirtning tenglamasi bo'lsin, $x=\text{const}$ tekislikni o'tkazamiz. Bu tekislikning sirt bilan kesimida PT egri chiziq hosil bo'ladi. Berilgan x bo'yicha xOy tekislikda biror $M(x;\ y)$ nuqtani qaraymiz. Shu nuqtaga sirtda $(x;\ y;\ z)$ nuqta mos keladi.

x ni o'zgarmas holda saqlab, y ga $\Delta y=MN=PT'$ orttirma beramiz. (144-chizma). Unda z funksiya $\Delta_y z=TT'$ orttirma oladi.

$N(x;\ y+\Delta y)$ nuqtaga $z=f(x,\ y)$ sirtning $T(x;\ y+\Delta y;\ z+\Delta z)$ nuqtasi mos keladi, $\frac{\Delta_y z}{\Delta y}$ nisbat PT kesuvchi bilan Oy ning musbat yo'nalishi orasidagi burchakning tangensiga teng.



144-chizma.

Demak, limit PT egri chiziqning P nuqtasidan o'tgan PB urinma bilan Oy o'qning musbat yo'nalishi orasida hosil bo'lgan β burchakning tangensiga teng:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{tg} \beta.$$

Xuddi shuningdek, $\frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha$.

10.1.8. TO'LIQ ORTTIRMA VA TO'LIQ DIFFERENSIAL

$z = f(x, y)$ funksiya to'liq orttirmasining ta'rifiga ko'ra:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y), \tag{1}$$

$z = f(x, y)$ funksiya qaralayotgan $(x; y)$ nuqtada uzluksiz xususiy hosilalarga ega deb qaraymiz. z ni xususiy hosilalar orqali ifodalaymiz. Buning uchun (1) ga $f(x, y + \Delta y)$ ni qo'shib ayiramiz:

$$\Delta z = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]. \tag{2}$$

Birinchi va ikkinchi kvadrat qavs ichida turgan ifodalarni mos ravishda birgina x va birgina y o'zgaruvchi funksiyasining ikki qiymati orasidagi ayirma deb, ularga Lagranj teoremasini tatbiq etsak, quyidagilarga ega bo'lamiz:

Birinchi qo'shiluvchiga tatbiq qilsak,

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \Delta x \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x};$$

$$\Delta z = \Delta x \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y}. \tag{3}$$

Ikkinchi qo'shiluvchiga tatbiq qilsak,

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \Delta y \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$

Farazimizga asosan xususiy hosilalar uzluksiz bo'lgani uchun:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \\ &\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

bu yerda $\bar{x}$ va $\bar{y}$ lar mos ravishda x bilan $x + \Delta x$, y bilan $y + \Delta y$ orasidagi son. $\Delta x \to 0$ va $\Delta y \to 0$ da $\bar{x}$ va $\bar{y}$ lar mos ravishda x va y ga intiladi. (3) va (4) dan:

$$\Delta z = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y + \gamma_1 \cdot \Delta x + \gamma_2 \cdot \Delta y.$$

Oldingi ikki qo‘shiluvchining yig‘indisi Δx va Δy ga nisbatan chiziqli ifoda va bu ifoda orttirmaning bosh bo‘lagini tashkil qiladi.

Ta’rif. To‘liq orttirmaning bosh qismi *to‘liq differensial* deyiladi u dz yoki df bilan belgilanadi:

$$dz = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y.$$

Erkli o‘zgaruvchilarning differensiallari orttirmalari bilan ustma-ust tushadi: $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$.

Shuning uchun:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy; \qquad \partial_x z = \frac{\partial z}{\partial x}, \ \ \partial_y z = \frac{\partial z}{\partial y} \tag{5}$$

xususiy differensiallar.

M i s o l. $z = x^3 y + x \operatorname{tg} y$ berilgan, dz ni toping.

Y e c h i s h. (5) formuladan foydalanamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y + \operatorname{tg} y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + x\frac{1}{\cos^2 y};$$

$$dz = (3x^2 y + \operatorname{tg} y)\,dx + \left(x^3 + x\frac{1}{\cos^2 y}\right)dy.$$

To‘liq differensialning taqribiy hisoblashga tatbiqi

$z = f(x, y)$ funksiya $(x; y)$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsin. Bu funksiyaning to‘liq orttirmasini topamiz:

$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$, bundan

$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta z$; $\Delta z \approx dz$;

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y.$$

Bu formulani taqribiy hisoblashga qo‘llaymiz.

M i s o l. $\operatorname{arctg}\left(\frac{1{,}98}{1{,}03} - 1\right)$ ni to‘liq differensial yordamida taqribiy hisoblang.

Yechish. $f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)\approx f(x,\ y)+f'_x(x,\ y)\Delta x+f'_y(x,\ y)\Delta y$ formulaga asosan tubandagini hosil qilamiz. Buning uchun $f(x,\ y)=\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}-1\right)$ funksiyani qaraymiz:

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{x+\Delta x}{y+\Delta y}-1\right)\approx\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}-1\right)+\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}-1\right)\right]'_x\Delta x+\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}-1\right)\right]'_y\Delta y$$

yoki

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{x+\Delta x}{y+\Delta y}-1\right)\approx\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}-1\right)+\frac{y}{y^2-(x-y)^2}\Delta x-\frac{x}{y^2-(x-y)^2}\Delta y.$$

Berilgan misolda $x=2,\ y=1,\ \Delta x=-0{,}02;\ \Delta y=0{,}03$ deb olamiz, u holda

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{2-0{,}02}{1+0{,}03}-1\right)\approx\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{1}-1\right)+\frac{1}{1^2-(2-1)^2}(-0{,}02)-\frac{2}{1^2-(2-1)^2}\,0{,}03$$

yoki

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1{,}98}{1{,}03}-1\right)=\operatorname{arctg}1-\frac{1}{2}\cdot 0{,}02-0{,}03=$$

$$=\frac{\pi}{4}-0{,}01-0{,}03\approx 0{,}785-0{,}04=0{,}781.$$

10.1.9. HAR XIL TARTIBDAGI XUSUSIY HOSILALAR

Ikki o'zgaruvchili $z=f(x,\ y)$ funksiya berilgan bo'lsin. Xususiy hosilalar $\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,\ y)$ va $\frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,\ y)$, umuman aytganda, x va y o'zgaruvchilarning funksiyasidir. Shuning uchun ulardan yana xususiy hosilalar olish mumkin. Demak, ikki o'zgaruvchili funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalari to'rtta bo'ladi, chunki $\frac{\partial z}{\partial x}$ va $\frac{\partial z}{\partial y}$ funksiyalardan har birini x bo'yicha va y bo'yicha differensiallash mumkin. Ikkinchi tartibli xususiy hosilalar tubandagicha belgilanadi: $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial x}=f''_{xx}(x,\ y)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,\ y)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,\ y)$, bu yerda f ketma-ket ikki marta x bo'yicha differensiallandi. Yana x va y bo'yicha differensiallansa, uchinchi tartibli xususiy hosilalarga ega bo'lamiz. Ular sakkizta. Umuman n-tartibli xususiy hosila $n-1$-tartibli xususiy hosilaning birinchi tartibli xususiy hosilasidir.

1-m i s o l. $f(x, y) = x^3y^2 + y^3$ funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalarini toping.

Y e c h i s h. Ketma-ket quyidagilarni topamiz:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y + 3y^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy^2; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial y} = \frac{\partial(3x^2y^2)}{\partial y} = 6x^2y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial(2x^3y+3y^2)}{\partial x} = 6x^2y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^3 + 6y.$$

2-m i s o l. Agar $z = y^2e^{2x} + x^4y^3 + 5$ bo‘lsa, $\frac{\partial^3 z}{\partial^2 x \partial y}$ ni toping.

Y e c h i s h. Ketma-ket quyidagilarni topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2y^2e^{2x} + 4x^3y^3; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4y^2e^{2x} + 12y^3x^2;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 8ye^{2x} + 36y^2x^2.$$

Bir necha o‘zgaruvchili funksiyani differensiallash natijasi har xil o‘zgaruvchilar bo‘yicha qanday tartibda differensiallashga bog‘liq bo‘ladimi yoki yo‘qmi? Boshqacha aytganda, ushbu $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ va $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ hosilalar yoki $\frac{\partial^3 f(x, y, z)}{\partial x \partial y \partial z}$ va $\frac{\partial^3 f(x, y, z)}{\partial z \partial x \partial y}$ va h. k. lar tengmi, teng emasmi? Bu savolga quyidagi teorema javob beradi (isbotsiz keltiramiz).

Teorema. *Agar $z = f(x, y)$ funksiya va uning f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} xususiy hosilalari $M(x; y)$ nuqtada va uning biror atrofida aniqlangan va uzluksiz bo‘lsa, bu nuqtada* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ $\left(f''_{xy} = f''_{yx}\right)$ *bo‘ladi.*

M i s o l. Agar $u = e^{xy}\sin z$ bo‘lsa, $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ va $\frac{\partial^3 u}{\partial z \partial y \partial x}$ ni toping.

Y e c h i s h. Ketma-ket xususiy hosilalarni topamiz:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ye^{xy}\sin z; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = e^{xy}\sin z + xye^{xy}\sin z = e^{xy}\sin z(1 + xy);$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z} = e^{xy}\cos z(1+xy); \quad \frac{\partial u}{\partial z} = e^{xy}\cos z;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial z\partial y\partial x} = e^{xy}\cos z + xye^{xy}\cos z = e^{xy}\cos z(1+xy).$$

Demak,

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial z\partial y\partial x}.$$

10.1.10. IKKI O'ZGARUVCHILI FUNKSIYA DIFFERENSIALLANISHINING YETARLI SHARTI

Teorema (differensiallanuvchanlikning yetarli sharti). *Agar $z = f(x, y)$ funksiya $P(x; y)$ nuqtaning biror δ atrofida xususiy hosilalarga ega bo'lsa va bu hosilalar nuqtaning o'zida uzluksiz bo'lsa, u holda funksiya shu nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi.*

Isbot. Funksiya to'liq orttirmasini quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\Delta z = [f(x) + \Delta x, y + \Delta y - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y)] - f(x, y)]. \quad (1)$$

Birinchi va ikkinchi kvadrat qavslar ichida turgan ifodalarni mos ravishda x va y o'zgaruvchili funksiyaning orttirmasi sifatida qarab hamda teorema shartiga ko'ra funksiya $f'_x(x, y+\Delta y)$ va $f'_y(x, y)$ xususiy hosilalarga ega bo'lgani uchun Lagranj teoremasini qo'llab, tubandagilarni hosil qilamiz:

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y+\Delta y) = f'_x(\xi,\ y+\Delta y)\Delta x;$$

$$f(x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y) = f'_y(x,\ \eta)\Delta y,$$

bu yerda: $\quad x < \xi < x+\Delta x,\ y < \eta < y+\Delta y.$

Teorema shartiga ko'ra f'_x, f'_y lar $P(x; y)$ nuqtada uzluksiz bo'lgani uchun:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\\ \xi\to 0}} f'_x(\xi,\ y+\Delta y) = f'_x(x,\ y) \quad (*)$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\\ \eta\to 0}} f'_y(x,\ \eta) = f'_y(x,\ y) \quad (**)$$

Limitning xossasidan foydalanib, (*) (**) ni quyidagicha yozamiz:

$$f'_x(\xi,\ y+\Delta y) = f'_x(x,y) + \alpha_1(\Delta x,\ \Delta y),$$

$$f'_y(x,\ \eta) = f'_y(x,y) + \alpha_2(\Delta x,\ \Delta y).$$

Bu yerda $\alpha_1(\Delta x,\ \Delta y)$, $\alpha_2(\Delta x,\ \Delta y)$ lar $\Delta x \to 0$ va $\Delta y \to 0$ da cheksiz kichik funksiyalar, bularni (1) ga qo'ysak, tubandagi ifoda hosil bo'ladi:

$$\Delta z = f'_x(x,\ y)\Delta x + f'_y(x,\ y)\Delta y + \alpha(\Delta x,\ \Delta y), \qquad (2)$$

bu yerda $\alpha(\Delta x,\ \Delta y) = \alpha_1(\Delta x,\ \Delta y)\Delta x + \alpha_2(\Delta x,\ \Delta y)$, bundan $\Delta x \to 0$ va $\Delta y \to 0$ da $\alpha_1(\Delta x,\ \Delta y) \to 0$, $\alpha_2(\Delta x,\ \Delta y) \to 0$, bundan esa $(\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0)$ da $\alpha(\Delta x,\ \Delta y) = 0$ bo'lishi kelib chiqadi.

Shuning uchun (2) tenglikning o'ng qismidagi dastlabki ikki qo'shiluvchining yig'indisi Δx va Δy ga nisbatan chiziqli ifoda bo'ladi va ta'rifga ko'ra $P(x\,;\,y)$ nuqtadagi funksiya differensialini ifodalaydi. Teorema isbotlandi.

M i s o l. Tubandagi $z = 2x^3 + 3y^2$ funksiyaning differensiallanuvchiligini tekshiring.

Y e c h i s h. Misolni yechishda funksiya differensiallanuvchiligining yetarli sharti bajarilishini tekshirish kifoya, xususiy hosilalarni hisoblaymiz:

$$f'_x(x;\ y) = 6x^2, \qquad f'_y(x;\ y) = 6y.$$

Bu hosilalar xOy tekisligida uzluksiz fuksiyalar. Shuning uchun $z = 2x^3 + 3y^2$ funksiya bu tekislikning har bir nuqtasida differensiallanuvchi va dz to'liq differensial mavjud:

$$dz = 6x^2\Delta x + 6y\Delta y\,; \qquad dz = 6x^2dx + 6ydy.$$

10.1.11. MURAKKAB FUNKSIYANING HOSILASI

Ikki o'zgaruvchining $z = f(x,\ y)$ differensiallanuvchi funksiyasi berilgan bo'lsin. x, y argumentlar ham t erkli o'zgaruvchining differensiallanuvchi funksiyalari bo'lsin, ya'ni $x = x(t)$ va $y = y(t)$; u holda $z = f(x(t),\ y(t)) = F(t)$ deb yozish mumkin.

$F(t)$ funksiya t erkli o'zgaruvchining murakkab funksiyasi yoki funksiyadan funksiya deyiladi. Bu yerda x va y argumentlar — oraliq o'zgaruvchilar bo'ladi. t o'zgaruvchiga ixtiyoriy Δt orttirma beramiz. U holda x va y o'zgaruvchilar mos ravishda Δx va Δy orttirma oladi, z funksiya ham

$$\Delta z = f(x + \Delta x;\ y + \Delta y) - f(x,\ y) \tag{1}$$

to'liq orttirma oladi.

$z = f(x,\ y)$ funksiya differensiallanuvchi bo'lgani uchun Δz to'liq orttirmani tubandagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha(\Delta x,\ \Delta y). \tag{2}$$

Bu yerda $\alpha(\Delta x,\ \Delta y)$, $p = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik miqdordir, ya'ni $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\alpha(\Delta x,\ \Delta y)}{\rho} = 0;$

(2) tenglikning ikkala qismini Δt ga bo'lamiz:

$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\alpha(\Delta x,\ \Delta y)}{\Delta t}$ va $\Delta t \to 0$ da limitga o'tamiz:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\alpha(\Delta x,\ \Delta y)}{\Delta t}. \tag{3}$$

Bu yerda $\frac{\partial z}{\partial x}$ va $\frac{\partial z}{\partial y}$ xususiy hosilalar Δt ga bog'liq bo'lmaganligi sababli, limit belgisidan tashqariga chiqarilgan. $x = x(t)$ va $y = y(t)$ funksiyalar differensiallanuvchi bo'lganligi sababli, tubandagiga ega bo'lamiz: $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$; $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt}$.

Endi $\frac{\alpha(\Delta x,\ \Delta y)}{\Delta t}$ munosabatning limitini topamiz. Buning uchun uni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\begin{aligned}\frac{\alpha(\Delta x,\ \Delta y)}{\Delta t} &= \frac{\alpha(\Delta x,\ \Delta y)}{\rho}\cdot\frac{\rho}{\Delta t} = \\ &= \frac{\alpha(\Delta x,\ \Delta y)}{\rho}\cdot\sqrt{\frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{\Delta t^2}} = \frac{\alpha(\Delta x,\ \Delta y)}{\rho}\cdot\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}.\end{aligned} \tag{4}$$

$x = x(t)$ va $y = y(t)$ funksiyalar differensiallanuvchi bo'lgani uchun ular uzluksizdir, shuning uchun, $\Delta t \to 0$ da $\Delta x \to 0$ va $\Delta y \to 0$, bundan esa $\Delta t \to 0$ da $\rho \to 0$. Bunda $\Delta t \to 0$ da (4) dagi birinchi ko'paytuvchi $\frac{\alpha(\Delta x,\ \Delta y)}{\Delta t} \to 0$, $\Delta t \to 0$ da ikkinchi ko'paytuvchi $\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$ ma'lum $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ songa intiladi.

Shunday qilib, (4) munosabatda $\Delta t \to 0$ da limitga o'tib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\alpha(\Delta x, \Delta y)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\alpha(\Delta x, \Delta y)}{\rho} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} =$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\alpha(\Delta x, \Delta y)}{\rho} \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = 0. \tag{5}$$

(5) esa (3) ning o'ng qismining $\Delta t \to 0$ dagi limiti mavjudligini ko'rsatadi. Demak, chap qismining limiti mavjud:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz}{dt}. \tag{6}$$

(5) va (6) formulalarni hisobga olib, (3) ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}. \tag{7}$$

Bu formulani argumentlar soni ikkitadan ko'p bo'lgan murakkab funksiyalar uchun ham umumlashtirish mumkin.

M i s o l. Agar $x = \cos t$, $y = \ln t$ bo'lsa, $z = x^2 + y^2$ murakkab funksiyaning $\frac{dz}{dx}$ hosilasini toping.

Y e c h i s h. $\frac{dz}{dx}$ ni topish uchun (7) formuladan foydalanamiz:

$$\frac{dz}{dt} = 2x(-\sin t) + 2y\frac{1}{t} = -2\cos t \sin t + \frac{2\ln t}{t} = -\sin 2t + \frac{2\ln t}{t}.$$

Ushbu $z = f(x, y)$ (bu yerda $y = y(x)$) ko'rinishga ega bo'ladigan xususiy holni, ya'ni $z = f(x, y(x)) = F(x)$ bitta x erkli o'zgaruvchining murakkab funksiyasi bo'lgan holni qaraymiz.

(7) formulaga asosan ushbuga egamiz:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}. \tag{8}$$

ammo $\frac{dx}{dx} = 1$ bo'lgani uchun:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}. \tag{9}$$

Bu funksiya ikki o'zgaruvchili funksiyaning $\frac{\partial z}{\partial x}$ xususiy hosilasini va bir o'zgaruvchili murakkab funksiyaning $\frac{dz}{dx}$ hosilasini o'z ichiga oladi. Bu oxirgi $\frac{dz}{dx}$ hosila *to'liq hosila* deb ataladi.

M i s o l. Agar $y = x^5$ bo'lsa, $z = \ln(e^x + e^y)$ funksiyaning $\frac{\partial z}{\partial x}$ xususiy va $\frac{dz}{dx}$ to'liq hosilalarini toping.

Y e c h i s h. Dastlab $\frac{\partial z}{\partial x}$ xususiy hosilani topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{e^x + e^y} \cdot e^x = \frac{e^x}{e^x + e^{x^5}}.$$

(9) formuladan foydalanib, to'liq hosilani ham topamiz:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{e^x}{e^x + e^y} + \frac{1}{e^x + e^y} \cdot e^x \cdot 5x^4 = \frac{e^x + 5x^4 e^y}{e^x + e^y} = \frac{e^x + 5x^4 e^{x^5}}{e^x + e^{x^5}}.$$

Endi z ikkita erkli x va y o'zgaruvchining murakkab funksiyasi bo'lgan umumiy holni qaraymiz, ya'ni $z = f(u, \vartheta)$, bu yerda $u = u(x, y)$ va $\vartheta = \vartheta(x, y)$ bo'lsin, u holda $z = f(u(x, y), \vartheta(x, y)) = F(x, y)$ bo'ladi.

Hamma funksiyalar differensiallanuvchi deb faraz qilamiz. Xususiy hosilani, masalan, $\frac{\partial z}{\partial x}$ ni topish uchun y argumentni o'zgarmas deb hisoblash kerak, u holda u va ϑ faqat birgina x o'zgaruvchining funksiyalari bo'lib qoladi.

Bu holni biz yuqorida qaragan edik. Bunda farq faqat shundaki, formuladagi $\frac{dz}{dx}$, $\frac{du}{dx}$ va $\frac{d\vartheta}{dx}$ hosilalar $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ va $\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$ xususiy hosilalar bilan almashadi.

Shunday qilib, tubandagi umumiy formulaga ega bo'lamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x}. \qquad (10)$$

$\frac{\partial z}{\partial y}$ xususiy hosila uchun ham shunga o'xshash formulani hosil qilish mumkin:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial y}.$$

Shunday qilib, murakkab funksiyaning xususiy hosilasi berilgan funksiyaning oraliq argumentlar bo'yicha xususiy hosilalar bilan bu argumentlarning mos holdagi erkli o'zgaruvchilar bo'yicha xususiy hosilalari ko'paytmasi yig'indisiga teng.

M i s o l. Agar $u = \frac{x}{y}$; $\vartheta = 3x - 2y$ bo'lsa, $z = u^2 \ln \vartheta$ murakkab funksiyaning $\frac{\partial z}{\partial x}$ va $\frac{\partial z}{\partial y}$ xususiy hosilalarini toping.

Y e c h i s h. (8) va (10) formulalardan foydalanib topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2u \ln \vartheta \cdot \frac{1}{y} + \frac{u^2}{\vartheta} \cdot 3 = \frac{2x}{y^2} \cdot \ln(3x - 2y) + \frac{3x^2}{y^2(3x-2y)};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2u \ln \vartheta \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + \frac{u^2}{\vartheta} \cdot (-2) = -\frac{2x^2}{y^3} \cdot \ln(3x - 2y) - \frac{2x^2}{y^2(3x-2y)}.$$

10.1.12. MURAKKAB FUNKSIYANING TO'LIQ DIFFERENSIALI

Bizga ma'lumki, $z = f(x, y)$ funksiyaning to'liq differensiali

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \tag{1}$$

formula bilan ifodalanar edi. Endi murakkab funksiya differensiali uchun formula keltirib chiqaramiz.

Aytaylik, z ikkita x va y o'zgaruvchining murakkab funksiyasi, ya'ni $z = f(u, \vartheta)$ bo'lsin, bu yerda $u = u(x, y)$ va $\vartheta = \vartheta(x, y)$ oraliq funksiyalar. z, u, ϑ funksiyalarni barchasi differensiallanuvchi funksiyalar bo'lsin.

(1) formuladagi $\frac{\partial z}{\partial x}$ va $\frac{\partial z}{\partial y}$ larni tubandagi ifodalar bilan almashtiramiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial y}.$$

U holda $dz = \left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right) dy$ bo'ladi.

Qavslarni ochib, qo'shiluvchilarni qaytadan guruhlaymiz:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right) + \frac{\partial z}{\partial \vartheta}\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} dx + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} dy\right).$$

Qavslar ichidagi ifodalar mos ravishda du va $d\vartheta$ to'liq differensiallarga teng.

Demak,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial \vartheta} d\vartheta, \tag{2}$$

bu yerda

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \qquad d\vartheta = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} dx + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} dy.$$

(2) formula murakkab funksiyaning to'liq differensialini ifodalaydi. Bu formulani ixtiyoriy sondagi o'zgaruvchilar uchun umumlashtirish mumkin.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Ikki o'zgaruvchili funksiya va uning aniqlanish sohasi deb nimaga aytiladi? Uni geometrik nuqtayi nazardan tushuntirib bering.
2. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning nuqtadagi limiti deb nimaga aytiladi?
3. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligini tushuntirib bering.
4. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning uzilish nuqtasi deb nimaga aytiladi? Misollar keltiring.
5. Xususiy hosila deganda nimani tushunasiz? Xususiy hosilaning geometrik ma'nosi nimadan iborat?
6. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning differensiallanuvchanligi zaruriy sharti nimadan iborat?
7. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning differensiallanuvchanligi yetarli sharti nimadan iborat?
8. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning nuqtadagi to'liq differensialiga ta'rif bering.
9. Funksiyaning to'liq differensiali uning xususiy hosilalari orqali qanday ifodalanadi?
10. Funksiyaning to'liq differensiali xususiy differensiallar orqali qanday ifodalanadi?

10.2. IKKI O'ZGARUVCHILI FUNKSIYA EKSTREMUMI. TEYLOR FORMULASI

10.2.1. IKKI O'ZGARUVCHILI FUNKSIYA EKSTREMUMI

Bir necha o'zgaruvchili funksiya uchun maksimum va minimum tushunchalari bir o'zgaruvchili funksiya maksimum va minimum tushunchalariga o'xshash kiritiladi. Biz bu tushunchalarni faqat ikki o'zgaruvchili funksiyaga nisbatan kiritamiz. Ikki o'zgaruvchili $z = f(x, y)$ funksiya biror G sohada berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. G soha $M_0(x_0; y_0)$ nuqtaga yetarli darajada yaqin bo'lib, undan farqli barcha $(x; y)$ nuqtalar uchun $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ bo'lsa, u holda $z = f(x, y)$ funksiya sohaning $M_0(x_0; y_0)$ nuqtasida *maksimumga erishadi* deyiladi.

2-ta'rif. Xuddi shunga o'xshash G soha $(x_0; y_0)$ nuqtadan boshqa va unga yetarli yaqin turgan barcha $(x; y)$ nuqtalar uchun $f(x_0, y_0) < f(x, y)$ bo'lsa, $z = f(x, y)$ funksiya sohaning $M_0(x_0; y_0)$ nuqtasida *minimumga ega* deyiladi.

Funksiyaning maksimum va minimumi funksiyaning *ekstremumlari* deyiladi.

Bir o'zgaruvchili funksiyadagidek, ikki o'zgaruvchili funksiyaning maksimumi va minimumi nuqtasini funksiyaning G sohadagi eng katta yoki eng kichik qiymati bilan aralashtirib yubormaslik kerak.

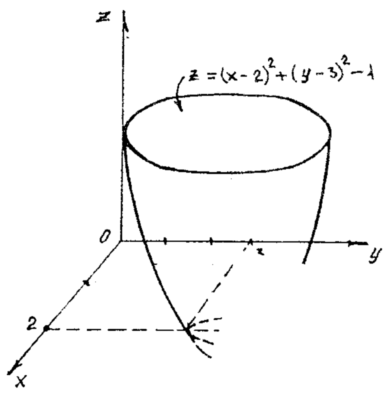
M i s o l. $z = (x - 2)^2 + (y - 3)^2 - 1$ funksiya $x = 2$, $y = 3$ da, ya'ni $(2; 3)$ nuqtada minimumga erishadi. Haqiqatan, $f(2; 3) = -1$, shuningdek, $(x - 2)^2$ va $(y - 3)^2$ esa $x \neq 2$ va $y \neq 3$ da doim musbat (145-chizma), ya'ni $f(x, y) > f(2, 3)$.

Ikki o'zgaruvchili funksiyaning maksimumi va minimumiga yuqorida berilgan ta'rifni boshqacha ta'riflash ham mumkin. $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, $f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \Delta f$.

3-ta'rif. Agar erkli o'zgaruvchining yetarlicha kichik bo'lgan barcha orttirmalarida $\Delta f < 0$ *bo'lsa*, $f(x, y)$ funksiya $M_0(x_0; y_0)$ nuqtada *maksimumga*, $\Delta f > 0$ *bo'lsa*, $f(x, y)$ funksiya $M(x_0; y_0)$ nuqtada *minimumga* erishadi.

Endi ekstremum mavjudligining zaruriy va yetarli shartlarini qaraymiz.

1-teorema (ekstremumning yetarli shartlari). *Agar $z = f(x, y)$ funksiya $M_0(x_0; y_0)$ nuqtada ekstremumga ega bo'lsa, u holda z ning har bir birinchi tartibli xususiy hosilasi argumentlarining shu qiymatlarida yo nolga teng bo'ladi, yo mavjud bo'lmaydi.*



145-ch

Haqiqatan ham, o'zgaruvchi y ga biror aniq qiymat beramiz. Masalan, $y = y_0$ bo'lsin. U vaqtda $f(x, y_0)$ funksiya bir o'zgaruvchi x ning funksiyasi bo'ladi. Bu funksiya $x = x_0$

bo'lganda ekstremumga (maksimum yoki minimumga) ega bo'ladi, demak, $z'_x(x_0; y_0)$ yo nolga teng yoki mavjud emas. Xuddi shuningdek, $z'_y(x_0; y_0)$ ning yo nolga teng bo'lishi yoki mavjud emasligini isbotlash mumkin. Ammo bu teorema ekstremum mavjudligi uchun yetarli emas.

M i s o l. $z = x^2 - y^2$ funksiyaning hosilalari $z'_x = 2x$; $z'_y = -2y$ bo'lib, ular $x = 0$, $y = 0$ bo'lganda nolga aylanadi. Lekin bu funksiya shu qiymatlarida maksimumga ham, minimumga ham ega emas. $z = f(x, y)$ funksiyaning $z'_x = 0$; $z'_y = 0$ (yoki mavjud bo'lmagan) nuqtalari uning *kritik nuqtalari* deb ataladi.

2-teorema (ekstremum mavjudligining yetarlilik shartlari). *$z = f(x, y)$ funksiya $M_0(x_0; y_0)$ nuqtani o'z ichiga olgan biror sohada uchinchi tartibgacha uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lsin. Shu bilan birga $M_0(x_0; y_0)$ nuqta $z = f(x, y)$ funksiyaning kritik nuqtasi, ya'ni $z'_x(x_0, y_0) = 0$, $z'_y(x_0, y_0) = 0$ bo'lsin. U holda $\Delta(M_0) = z''_{xx}(M_0)\cdot z''_{yy}(M_0) - [z''_{xy}(M_0)]^2 > 0$ shartda, $M_0(x_0; y_0)$ nuqta funksiyaning $\Delta(M_0) < 0$ bo'lgan holda maksimum nuqtasi, $\Delta(M_0) > 0$ da minimum nuqtasi bo'ladi.*

Tubandagi $\Delta(M_0) = z''_{xx}(M_0)\cdot z''_{yy}(M_0) - [z''_{xy}(M_0)]^2 < 0$ shartda $M_0(x_0; y_0)$ nuqtada funksiya ekstremumga ega bo'lmaydi.

$\Delta(M_0) = z''_{xx}(M_0)\cdot z''_{yy}(M_0) - [z''_{xy}(M_0)]^2 = 0$ shartda esa $M_0(x_0; y_0)$ nuqtada funksiya ekstremumga ega bo'lishi ham mumkin, bo'lmasligi ham mumkin.

M i s o l. $z = x^2 - 2xy + 3y^2 + x - 2y + 5$ funksiya maksimum yoki minimumga ega yoki ega emasligini tekshiring.

Y e c h i s h. Kritik nuqtalarni topamiz. Buning uchun birinchi tartibli xususiy hosilalarni topib, nolga tenglab, tenglamalar sistemasini hosil qilamiz va bu sistemani yechamiz:

$$z'_x = 2x - 2y + 1; \quad z'_y = -2x + 6y - 2$$

$$\begin{cases} 2x - 2y + 1 = 0, \\ -2x + 6y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{1}{4}; \quad y = \frac{1}{4},$$

demak, kritik nuqta: $\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$.

Endi ikkinchi tartibli xususiy hosilani topamiz:

$z''_{xx} = 2$; $z''_{xy} = 2$; $z''_{yy} = 6$. $\Delta(M_0)$ ifodani tuzamiz:

$$\Delta(M_0) = z''_{xx}(M_0)\, z''_{yy}(M_0) - [z''_{xy}(M_0)]^2 =$$

$$= 2\cdot 6 - (-2) = 12 + 2 = 14 > 0,$$

demak, $\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$ nuqtada funksiya minimumga erishadi, $z_{\min} = 5\frac{3}{8}$.

10.2.2. IKKI O'ZGARUVCHILI FUNKSIYA EKSTREMUMINING TATBIQI

Ikki o'zgaruvchili funksiya ekstremumining tatbiqini ko'rishdan oldin bir necha o'zgaruvchili funksiya ekstremumi nazariyasining tajribaviy ma'lumotlar asosida funksional bog'lanishlarni ifodalash uchun formulalar hosil qilish asosiy vositalardan biri ekanini aytmoq zarur. Buning uchun formulalarni eng kichik kvadratlar usuli bilan tajribadan olingan ma'lumotlar asosida hosil qilinishini ko'rib o'tamiz.

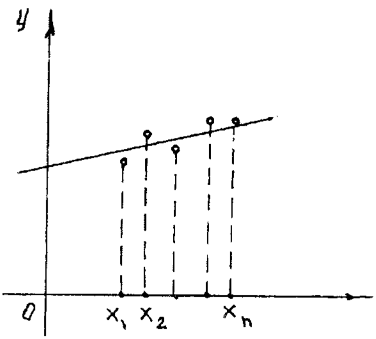
Bu usulning mohiyati tubandagicha:

y miqdorning x miqdorga funksional bog'liqligi $y = \varphi(x)$ ni tajribaga asosan aniqlash talab qilinsin. Tajriba natijasida argumentning n ta qiymatlari uchun funksiyaning n ta mos qiymatlari olingan bo'lsin. Natijalar quyidagi jadvalda yozilgan:

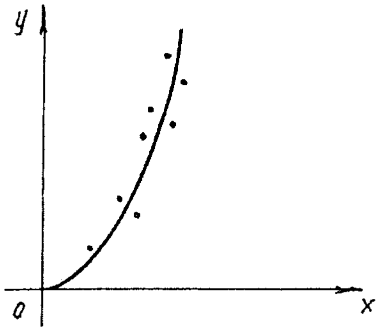
x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

$y = \varphi(x)$ funksiyaning ko'rinishi nazariy mulohazalarga asosan yoki tajribadan olingan qiymatlarga mos keladigan nuqtalarning koordinatalar tekisligida qanday joylashganiga qarab aniqlanadi (146, 147-chizmalar).

Olingan tajriba natijalari 146-chizmadagidek bo'lsa, tajriba bajarilganda ozgina xato bo'lishiga ko'ra $y = ax + b$ chiziqli funksiya ko'rinishida aniqlash mumkin. 147-chizmadagidek bo'lsa, $y = ax^b$ ko'rinishida izlash tabiiy. Funksiyani $y = (\varphi, a, b, c)$ ko'rinishida tanlab olingach, shu funksiyaga kiruvchi a, b, c... parametrlarni shunday tanlaymizki, u o'rganilayotgan hodisani qaysidir ma'noda



146-chizma.



147-chizma.

juda yaxshi aks ettirsin. Qo'yilgan masalani yechishda juda keng tarqalgan usul *eng kichik kvadratlar* usulidir. Bu usulda tajribadan olingan y qiymatlar bilan mos nuqtalardagi $\varphi(x, a, b, c)$ funksiyaning qiymatlari orasidagi ayirmalar kvadratlarining yig'indisini qaraymiz:

$$S(a, b, c) = \sum_{i=1}^{n}[y_i - \varphi(x, a, b, c)]^2;$$

$a, b, c, \ldots$ parametrlarni shunday tanlab olamizki, bu yig'indi eng kichik qiymatlar qabul qilsin:

$$S(a, b, c\ldots) = \sum_{i=1}^{n}[y_i - \varphi(x, a, b, c)]^2 = \min. \qquad (1)$$

Demak, masala (1) funksiyani minimumga aylantiradigan $a, b, c, \ldots$ parametrlar qiymatlarini topishga keltiriladi. Bu qiymatlarni esa oldingi mavzudagi 1, 2-teoremalarga asosan aniqlaymiz. $a, b, c, \ldots$ parametrlarning bu qiymatlari quyidagi tenglamalar sistemasini qanoatlantirishi kerak:

$$\frac{\partial s}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial c} = 0$$

yoki bularni yoyilgan ko'rinishda yozsak,

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}[y_i - \varphi(x, a, b, c\ldots)]^2 \frac{\partial\varphi(x_i, a, b, c\ldots)}{\partial a} = 0,\\
&\sum_{i=1}^{n}[y_i - \varphi(x, a, b, c\ldots)]^2 \frac{\partial\varphi(x_i, a, b, c\ldots)}{\partial b} = 0,\\
&\sum_{i=1}^{n}[y_i - \varphi(x, a, b, c\ldots)]^2 \frac{\partial\varphi(x_i, a, b, c\ldots)}{\partial c} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Bu yerda qancha noma'lum bo'lsa, shuncha tenglama bo'ladi. Har qaysi tayin holda tenglamalar sistemasi yechimi mavjudligi va $S(a, b, c, \ldots)$ funksiyaning minimumga ega ekanligi masalasi tekshiriladi.

M i s o l. Aytaylik, tajribadan olingan ma'lumotlar 146-chizmadagidek bo'lsin. Funksiyani $y = ax + b$ ko'rinishida izlaymiz. Bu holda $S(a, b)$ funksiya quyidagi ko'rinishida bo'ladi:

$S(a, b) = \sum_{i=1}^{n}[y_i - (ax_i + b)]^2$, bu funksiya ikkita a, b o'zgaruvchili funksiyadir. x_i va y_i lar berilgan sonlar.

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n}[y_i - (ax_i + b)]x_i = 0; \qquad \frac{\partial S}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n}[y_i - (ax_i + b)] = 0.$$

Tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - bn = 0.$$

Ikki a va b noma'lumli ikki chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qildik. Topilgan a va b qiymatlarda $S(a, b)$ funksiya minimumga ega bo'lishi ravshan. Haqiqatan ham,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = 2\sum_{i=1}^{n} x^2, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = 2n;$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b}\right)^2 = 4n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(2\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_j)\right)^2 = 4\sum_{i<j} (x_i - x_j)^2 > 0,$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} > 0.$$

Demak, $S(a, b)$ funksiya minimumga ega. Tajribaviy natijani $y = ax + b$ funksiya shaklida ifodalash mumkin.

10.2.3. IKKI O'ZGARUVCHILI FUNKSIYA UCHUN TEYLOR FORMULASI

Teylor formulasi $f(x + h, y + k)$ funksiya qiymatlarini $f(x, y)$ funksiya va ularning h va k orttirmalari darajasi bo'yicha yoyilmalarini beradi. Ikki o'zgaruvchili funksiya uchun Teylor formulasini topishda yordamchi t o'zgaruvchili funksiya $F(t) = f(x + ht, y + kt)$ (1) ni qaraymiz. Bu funksiya $t = 1$ qiymatda berilgan $f(x + h, y + k)$ funksiyani beradi. t o'zgaruvchiga nisbatan $F(t)$ funksiyaga Makloren formulasini tatbiq etamiz va keyinchalik $t = 1$ deb olamiz. Teylor formulasini keltirib chiqarishda ikkinchi tartibli hadlar bilan chegaralanamiz. Bizga ma'lumki, $F(t)$ funksiya uchun Makloren formulasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$F(t) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!}t + \frac{F''(\theta t)}{2!}t^2, \quad 0 < \theta < 1. \tag{2}$$

Murakkab funksiyani differensiallash formulasidan foydalanib, (1) dan $F'(t)$ va $F''(t)$ larni topamiz:

$$F'(t) = h\frac{\partial f}{\partial x}(x+ht,\ y+kt) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x+ht,\ y+kt), \tag{3}$$

$$F''(t) = h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \tag{4}$$

(2), (3), (4) dan ($t = 1$ deb olamiz)

$$f(x+h,\ y+k) = f(x,\ y) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x,\ y) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x,\ y) + \frac{1}{2!}\times$$

$$\times\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x+\theta h,\ y+\theta k)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x+\theta h,\ y+\theta k)\cdot hk +\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x+\theta h,\ y+\theta k)k^2\right) \tag{5}$$

formulaga ega bo'lamiz. (5) formula ikki o'zgaruvchili funksiya uchun Teylor formulasidir.

10.3. FAZODA EGRI CHIZIQQA URINMA TENGLAMASI. SIRTGA URINMA TEKISLIK VA NORMAL

10.3.1. FAZODA EGRI CHIZIQQA URINMA TENGLAMASI

Fazodagi egri chiziqqa urinma, normal ta'riflari ham tekis egri chiziqdagi urinma, normal ta'riflarga o'xshash bo'ladi. Fazoda egri chiziq quyidagi parametrik tenglamalar bilan berilgan bo'lsin:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t). \tag{1}$$

Bu yerda t — parametr. Egri chiziqning vektor ko'rinishidagi tenglamasi:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \tag{2}$$

(2) egri chiziqqa uning $M(x;\ y;\ z)$ nuqtasida urinma tenglamasini yozamiz. $M(x;\ y;\ z)$ nuqtadan o'tgan to'g'ri chiziq tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\frac{X-x}{m} = \frac{Y-y}{n} = \frac{Z-z}{p}, \tag{3}$$

bu erda X, Y, Z — to'g'ri chiziq o'zgaruvchi nuqtasining koordinatalari, m, n, p — shu to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi kosinuslariga (ya'ni to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori proyeksiyalariga) proporsional miqdorlar.

Ikkinchi tomondan,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

vektor urinma bo'yicha yo'nalgan. Shuning uchun bu vektorning proyeksiyalari urinmaning yo'naltiruvchi kosinuslariga proporsional. U holda urinmaning tenglamasi tubandagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}}. \tag{4}$$

M i s o l. $\varphi = \frac{\pi}{4}$ qiymatda $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, $z = h\varphi$ vint chiziqqa urinmaning tenglamasini yozing.

Y e c h i s h. (4) formuladan foydalanamiz, buning uchun $\frac{dx}{d\varphi}$, $\frac{dy}{d\varphi}$, $\frac{dz}{d\varphi}$ larni topamiz:

$$\frac{dx}{d\varphi} = -a\sin\varphi, \quad \frac{dy}{d\varphi} = a\cos\varphi, \quad \frac{dz}{d\varphi} = h.$$

(4) formula bo'yicha:

$$\frac{X - a\cos\varphi}{-a\sin\varphi} = \frac{Y - a\sin\varphi}{-a\cos\varphi} = \frac{Z - h\varphi}{h};$$

$t = \frac{\pi}{4}$, bo'lganda:

$$\frac{X - \frac{a\sqrt{2}}{2}}{-\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{Y - \frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{Z - h\frac{\pi}{4}}{h}$$

yoki

$$\frac{X - \frac{a\sqrt{2}}{2}}{-1} = \frac{Y - \frac{a\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{Z - h\frac{\pi}{4}}{\frac{h}{a}\sqrt{2}}.$$

10.3.2. SIRTGA URINMA TEKISLIK VA NORMAL

Sirtga urinma tekislik va normal tenglamasini keltirib chiqarishdan oldin sirtning maxsus va oddiy nuqtalari haqida tushuncha kiritamiz.

Sirt
$$F(x; y; z) = 0 \tag{1}$$
ko'rinishidagi tenglama bilan berilgan bo'lsin.

Agar sirtdagi $M(x; y; z)$ nuqtada $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ xususiy hosilalarning uchalasi nolga teng bo'lsa yoki ulardan birortasi mavjud bo'lmasa, M nuqta sirtning *maxsus nuqtasi* deb aytiladi.

Agar sirtdagi $M(x; y; z)$ nuqtada $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ xususiy hosilalarning uchalasi mavjud va uzluksiz bo'lib, ulardan bittasi noldan farqli bo'lsa, M nuqta sirtning *oddiy nuqtasi* deb aytiladi.

Endi sirtga urinma ta'rifini kiritamiz.

1-ta'rif. Agar to'g'ri chiziq sirt ustida yotgan biror egri chiziqqa uning $M(x; y; z)$ nuqtasida urinma bo'lsa, bu to'g'ri chiziq sirtga M nuqtada *urinma* deyiladi.

M nuqtadan sirt ustida yotgan cheksiz ko'p egri chiziqlar o'tadi, shuning uchun bu nuqtadan sirtga cheksiz ko'p urinmalar o'tishi mumkin.

Urinmalar esa urinma tekisligi hosil qiladi. Bu haqda quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

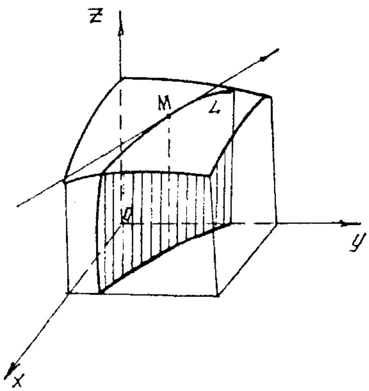
Teorema. *Berilgan (1) sirtning M oddiy nuqtasidagi hamma urinmalar bir tekislikda yotadi (148-chizma).*

2-ta'rif. Egri sirtning berilgan M nuqtasidan o'tuvchi sirt ustida yotgan egri chiziqlarga urinma joylashgan tekislik sirtga M nuqtada *urinma tekislik* deyiladi (149-chizma). Sirtning maxsus nuqtalarida urinma tekislik mavjud bo'lmasligi mumkin.

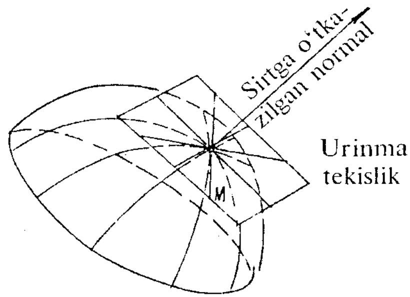
Bunday nuqtalarda sirtga urinma to'g'ri chiziqlar bir tekislikda yotmasligi mumkin.

Masalan, konus sirtining uchi maxsus nuqtadir. Bu nuqtada konus sirtga urinma to'g'ri chiziqlar bir tekislikda yotmaydi (ularning o'zlari konus sirtni hosil qiladi).

Oddiy nuqtada (1) sirtga urinma tekislik tenglamasini yozamiz. Bu tekislik sirtning M nuqtasidagi $\vec{N} = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k}$ normal vektorga perpendikular bo'lgani uchun, uning tenglamasi ushbu ko'rinishda bo'ladi:



148-chizma.



149-chizma.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0. \qquad (2)$$

Agar sirt tenglamasi $z=f(x, y)$ yoki $z-f(x, y)=0$ shaklida berilgan bo'lsa, $\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial z}=1$ bo'ladi va bu holda urinma tekislik tenglamasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$Z-z=\frac{\partial f}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(Y-y). \qquad (3)$$

3-ta'rif. (1) sirtning $M(x;\ y;\ z)$ nuqtasi orqali urinma tekislikka perpendikular qilib o'tkazilgan to'g'ri chiziq sirtga *normal* deb ataladi.

Normalning tenglamasini yozamiz. Uning yo'nalishi N vektorning yo'nalishi bilan bir xil bo'lgani uchun, uning tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\frac{X-x}{\frac{dF}{dx}}=\frac{Y-y}{\frac{dF}{dy}}=\frac{Z-z}{\frac{dF}{dz}}. \qquad (4)$$

Agar sirtning tenglamasi $z=f(x, y)$ yoki $z-f(x, y)=0$ shaklda berilgan bo'lsa, normal tenglamasi tubandagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\frac{X-x}{-\frac{df}{dx}}=\frac{Y-y}{-\frac{df}{dy}}=\frac{Z-z}{1}. \qquad (5)$$

M i s o l. $x^2+y^2+z^2=38$ shar sirtining $M(2;\ 3;\ 5)$ nuqtasida urinma tekislik va normal tenglamasini yozing.

Y e c h i s h. $F(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2 - 38 = 0;$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z;$$

$x = 2;\ y = 3;\ z = 5$ bo'lganda $\frac{\partial F}{\partial x} = 4, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 6, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 10.$

U holda urinma tekislik tenglamasi:

$$4(x - 2) + 6(y - 3) + 10(z - 5) = 0$$

$$\text{yoki} \quad 4x + 6y + 10z - 76 = 0.$$

Normal tenglamasi:

$$\frac{x-2}{4} = \frac{x-3}{6} = \frac{x-5}{10} \quad \text{yoki} \quad \frac{x-2}{2} = \frac{x-3}{3} = \frac{x-5}{5}.$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Ikki o'zgaruvchili funksiya ekstremumi deganda nimani tushunasiz?
2. Ekstremum mavjudligining zaruriy va yetarli shartlari uchun formulalar keltirib chiqaring.
3. Fazoda egri chiziqqa normal nima?
4. Fazoda sirtga urinma tenglamasini yozing.
5. Sirtga normal tenglamasining formulasini keltirib chiqaring.

11-bob. DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

11.1. DIFFERENSIAL TENGLAMA TUSHUNCHASI VA UNING XOSSALARI. BA'ZI BIR BIRINCHI TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI YECHISH USULLARI

11.1.1. DIFFERENSIAL TENGLAMAGA OLIB KELUVCHI MASALALAR

Atrofimizda sodir bo'layotgan ko'pgina hodisalar va jarayonlar ularni tavsiflaydigan noma'lum funksiya va uning hosilasi qatnashgan tenglamalar orqali ifodalanadi.

Bu tenglamadan noma'lum funksiyani topish masalasi qo'yiladi. Misollar keltiramiz.

1-masala. Massasi m bo'lgan jism biror balandlikdan yerga tashlab yuborilgan. Bu jismning tushish tezligi v qanday qonun bilan o'zgaradi? $v = v(t)$ munosabatni topish talab qilinadi.

Yechish. Nyutonning ikkinchi qonuniga ko'ra:

$$ma = F, \tag{*}$$

bu yerda: m — jism massasi; a — jism tezlanishi; F — ta'sir etuvchi kuch; bunda ikki hol bo'lishi mumkin:

a) jismga havoning qarshiligi hisobga olinmagan hol

Jismga havoning qarshiligi hisobga olinmasa, jism faqat og'irlik kuchi ta'sirida harakatlanadi, ya'ni $F = mg$ ga teng bo'ladi.

U holda (*) dan quyidagi tenglamaga ega bo'lamiz:

$$m\frac{dv}{dt} = mg \quad \text{yoki} \quad \frac{dv}{dt} = g. \tag{**}$$

(**) — tezlikka nisbatan birinchi tartibli differensial tenglama.

b) jismga havoning tezligiga proporsional bo'lgan qarshilik kuchi ta'sir etgan hol

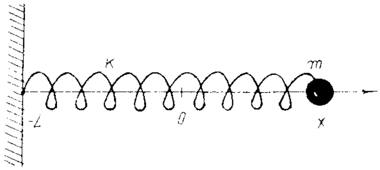
Bunda $F_{\text{qarsh.}} = \rho v$ bo'ladi, bu yerda — ρ proporsionallik koeffitsiyenti, v — jismning tezligi.

Bu holda jismga $F = mg - F_{\text{qarsh.}}$ kuch ta'sir etadi. U holda (*) dan:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - pv \quad \text{yoki} \quad \frac{dv}{dt} = g - \frac{p}{m}v \tag{***}$$

ga ega bo'lamiz.

Biz yana birinchi tartibli differensial tenglamaga ega bo'ldik.



150-chizma.

2-m a s a l a. Massasi m ga teng bo'lgan yukni k bikrlikka ega prujinadagi to'g'ri chiziqli tebranma harakatidagi holati x (uning koordinatasi x ga bog'liq, boshqacha aytganda $x = x(t)$), ya'ni $x = x(t)$ funksiyani aniqlang.

Y e c h i s h. Prujina erkin (cho'zilmasdan turgan) holatdagi yukning turgan nuqtasini koordinatalar boshi 0 deb belgilab olamiz (150-chizma).

U holda prujina cho'zilganda uzunligi l bo'lsa, prujinaning mahkamlangan ikkinchi uchining koordinatasi $-l$ bo'ladi. Shunday qilib, yukning koordinatasi son jihatidan prujina uzunligining o'zgarishiga teng bo'ladi.

Prujinaning uncha katta bo'lmagan cho'zilishida prujinaning yukka ta'sir kuchi Guk qonuniga ko'ra tubandagicha ifodalanadi:

$$F = -kx,$$

bu yerda «–» ishorasining olinishiga sabab, kuch yo'nalishi prujinaning cho'zilishi (qisilishi) yo'nalishiga qarama-qarshi; tezlik ta'rifiga ko'ra:

$$v = \frac{dx}{dt}.$$

Bu holat uchun Nyutonning ikkinchi qonuniga ko'ra tubandagi tenglamani yoza olamiz:

$$F = ma; \ a = \frac{d^2x}{dt^2}; \ \ m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \ \text{ yoki } \ \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0,$$

bu esa ikkinchi tartibli differensial tenglama.

11.1.2. DIFFERENSIAL TENGLAMANING TA'RIFI VA UNING UMUMIY YECHIMI

1-ta'rif. Erkli o'zgaruvchi x, noma'lum funksiya $y = f(x)$ va uning $y', y'', ..., y^{(n)}$ hosilalari qatnashgan tenglama *differensial tenglama* deyiladi.

Differensial tenglama simvolik ravishda tubandagicha yoziladi:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

yoki

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ..., \frac{d^{(n)}y}{dx^n}\right) = 0.$$

Agar izlangan funksiya $y = f(x)$ bitta erkli o'zgaruvchining funksiyasi bo'lsa, u holda differensial tenglama *oddiy* deyiladi. Agar izlangan funksiya $y = f(x)$ ikki yoki undan ortiq o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lsa, bunday differensial tenglama *xususiy hosilali differensial tenglama* deyiladi.

2-ta'rif. Differensial tenglamaning *tartibi* deb tenglamaga kirgan hosilaning eng yuqori tartibiga aytiladi.

Masalan, $y' - 2xy^2 + y + 5 = 0$ — birinchi darajali, $y'' + ky'' - - by - \sin x = 0$ esa ikkinchi darajali differensial tenglamadir.

3-ta'rif. Differensial tenglamaning *yechimi* yoki *integrali* deb differensial tenglamaga qo'yganda uni ayniyatga aylantiradigan har qanday $y = \varphi(x)$ funksiyaga aytiladi.

M i s o l. $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$ differensial tenglamaning yechimlari $y = e^x$ va $y = e^{-x}$ funksiyalari bo'ladi.

Bularni tenglamaga qo'yamiz: $y' = e^x$; $y'' = e^x$; $e^x - e^x = 0$, xuddi shuningdek, $y' = -e^{-x}$; $y'' = e^{-x}$; $e^{-x} - e^{-x} = 0$.

11.1.3. BIRINCHI TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

Ushbu $F(x, y, y') = 0$ tenglama *birinchi tartibli differensial tenglama* deyiladi.

Agar uni y' ga nisbatan yechish mumkin bo'lsa, uni $y' = f(x, y)$ ko'rinishda yozish mumkin. Bu holda differensial tenglama *hosilaga nisbatan yechilgan* deyiladi.

Differensial tenglama yechimiga oldingi mavzuda ta'rif berdik. Ammo misollardan ko'rinadiki, differensial tenglamaning yechimi bitta funksiya bo'lmasdan, funksiyalarning bir butun to'plami bo'lishi mumkin.Shuning uchun umumiy yechim to'g'risida so'z yuritamiz.

Teorema. *Agar $y' = f(x, y)$ tenglamada $y = f(x)$ funksiya va undan y bo'yicha olingan $\frac{df'}{dy}$ xususiy hosila xOy tekislikdagi nuqtani o'z ichiga oluvchi biror sohada uzluksiz funksiyalar bo'lsa, u holda berilgan tenglamaning $x = x_0$ bo'lganda $y = y_0$ shartni qanoatlantiruvchi birgina yechimi mavjuddir.*

$x = x_0$ bo'lganda y funksiya berilgan y_0 songa teng bo'lishi kerak, degan shart *boshlang'ich shart* deyiladi. Bu shart ko'pincha $y_{x=x_0} = y_0$ ko'rinishda yoziladi.

1-ta'rif. $y' = f(x, y)$ tenglamaning boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasi *Koshi masalasi* deyiladi.

2-ta'rif. Birinchi tartibli differensial tenglamaning *umumiy yechimi* deb qo'yilgan ushbu shartlarni qanoatlantiruvchi $y = \varphi(x;\ C)$ funksiyaga aytiladi (bunda C ixtiyoriy o'zgarmas son):

a) bu funksiya C o'zgarmas miqdorning har qanday tayin qiymatida ham differensial tenglamani qanoatlantiradi;

b) $x = x_0$ bo'lganda $y = y_0$ boshlang'ich shart har qanday bo'lganda ham, ixtiyoriy o'zgarmas C ning shunday C_0 qiymatini topish mumkinki, $y = \varphi(x;\ C)$ funksiya boshlang'ich shartni qanoatlantiradi, ya'ni $y_0 = \varphi(x_0;\ C_0)$.

Biz differensial tenglamaning umumiy yechimini izlashda ko'pincha y ga nisbatan yechilmagan $\Phi(x,\ y,\ C) = 0$ ko'rinishidagi munosabatga duch kelamiz.

Umumiy yechimni oshkormas holda ifodalovchi $\Phi(x,\ y,\ C) = 0$ ko'rinishidagi tenglik differensial tenglamaning *umumiy integrali* deyiladi.

3-ta'rif. Ixtiyoriy C o'zgarmas miqdorga ma'lum $C = C_0$ qiymat berish natijasida $y = \varphi(x;\ C_0)$ umumiy yechimdan hosil bo'ladigan har qanday funksiya *xususiy yechim* deb ataladi. Bu holda $\Phi(x,\ y,\ C_0) = 0$ munosabat tenglamaning *xususiy integrali* deyiladi.

Umumiy integral geometrik nuqtayi nazardan koordinatalar tekisligida bir ixtiyoriy o'zgarmas C miqdorga bog'liq bo'lgan egri chiziqlar oilasini ifodalaydi. Bu egri chiziqlar berilgan differensial tenglamaning *integral egri chiziqlari* deyiladi. Xususiy integralga bu oilaning tekislikda berilgan biror nuqta orqali o'tuvchi bitta egri chizig'i mos keladi.

Tenglamaning yechimi deb, faqat tenglamani qanoatlantiruvchi $y = \varphi(x;\ C_0)$ funksiyanigina tushunmasdan, balki unga mos integral egri chiziqni ham tushunish kerak.

Differensial tenglamalarni yechishning yagona usuli mavjud bo'lmaganligidan differensial tenglamalarning ayrim turlarini va ularning yechimlarini topish usullarini qaraymiz.

11.1.4. O'ZGARUVCHILARI AJRALGAN VA AJRALADIGAN TENGLAMALAR

1. Eng sodda birinchi tartibli differensial tenglama quyidagi ko'rinishda bo'lib, unga *o'zgaruvchilari ajralgan* differensial tenglama deyiladi:

$$Mdx + Ndy = 0. \tag{1}$$

Bu tenglamaning umumiy integralini hadlab integrallash orqali topamiz: $\int Mdx + \int Ndy = C$.

M i s o l. $xdx + ydy = 0$ tenglamani umumiy yechimini toping.

Y e c h i s h. $xdx + ydy = 0$ tenglama o'zgaruvchilari ajralgan birinchi tartibli differensial tenglama. Uni integrallab, umumiy integralni topamiz: $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \overline{C}$; $\int xdx + \int ydy = 0$; $2\overline{C} = C^2$ deb belgilab, $x^2 + y^2 = C^2$ ga ega bo'lamiz. Bu markazi koordinatalar boshida, radiusi C ga teng bo'lgan konsentrik aylanalar oilasidan iborat.

2. Ushbu

$$M_1(x) \cdot N_1(y)dx + M_2(x) \cdot N_2(y)dy = 0, \tag{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x_1) \cdot f_2(y) \tag{3}$$

ko'rinishidagi tenglamalar ham o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamalar deyiladi.

(2) tenglamani $N_1(y) \cdot M_2(x) \neq 0$ ga bo'lib, uni *o'zgaruvchilari ajralgan* tenglamaga keltiramiz:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0.$$

Buni integrallab, umumiy integralni topamiz. (3) ko'rinishdagi tenglamaning o'ziga xos tomoni: tenglamaning o'ng tomoni har biri bitta x yoki y o'zgaruvchiga bog'liq bo'lgan ko'paytuvchilarga ajralgan.

(3) tenglamani quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$dy = f_1(x) \cdot f_2(y)dx,$$

bundan $f_2(y) \neq 0$ deb quyidagi ko'rinishdagi tenglamaga ega bo'lamiz: $\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$. Bu ifodani integrallab umumiy integralini topamiz: $\int \frac{1}{f_2(y)}dy = \int f_1(x)dx + C$.

M i s o l. $y' = x^2y$ tenglamaning umumiy integralini toping.

Y e c h i s h. y' ni $\frac{dy}{dx}$ ga almashtiramiz: $\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot y$, bundan: $dy = x^2ydx$; $y \neq 0$ deb quyidagini hosil qilamiz: $\frac{dy}{y} = x^2dx$.

Integrallasak: $\int \frac{dy}{y} = \int x^2dx + C$; $\quad \ln|y| = \frac{x^3}{3} + C_1$,

bundan $|y| = e^{\frac{x^3}{3} + C_1} = e^{C_1} \cdot e^{\frac{x^3}{3}}$ yoki $y = (\pm e^{C_1})e^{\frac{x^3}{3}}$;

$\pm e^{C_1} = C$ deb belgilasak, umumiy integral quyidagi ko‘rinishni oladi: $y = Ce^{\frac{x^3}{3}}$.

11.1.5. BIRINCHI TARTIBLI BIR JINSLI TENGLAMALAR

1-ta’rif. Agar μ ning har qanday qiymatida $f(\mu x, \mu y) = \mu^n f(x, y)$ ayniyat to‘g‘ri bo‘lsa, $f(x, y)$ funksiya x va y o‘zgaruvchilarga nisbatan n o‘lchovli *bir jinsli* funksiya deb ataladi.

1-misol. $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ funksiya bir o‘lchovli bir jinsli funksiya; $f(\mu x, \mu y) = \sqrt{(\mu x)^2 - (\mu y)^2} = \mu\sqrt{x^2 - y^2} = \mu f(x, y)$.

2-misol. $f(x, y) = x^2y^2 - y^4$ funksiya to‘rt o‘lchovli bir jinsli funksiya; $f(\mu x, \mu y) = (\mu x)^2(\mu y)^2 - (\mu x)^4 = \mu^4(x^2y^2 - y^4)$.

3-misol. $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$ funksiya nol o‘lchovli bir jinsli funksiya.

2-ta’rif. Agar birinchi tartibli

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

differensial tenglamada $f(x, y)$ funksiya x va y ga nisbatan nol o‘lchovli bir jinsli funksiya bo‘lsa, (1) o‘zgaruvchilarga nisbatan *bir jinsli* tenglama deyiladi.

Bir jinsli tenglamani yechish

Agar tenglamaning o‘ng tomonidagi $f(x, y)$ funksiya nol o‘lchovli bir jinsli funksiya bo‘lsa, unda $\mu = \frac{1}{x}$ desak, $f(x, y) = f\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$ ga ega bo‘lamiz. Bu holda (1) tenglama

$$\frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right) \tag{1'}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

O‘zgaruvchilarni almashtiramiz: $z = \frac{y}{x}$ yoki $y = zx$, u holda $\frac{dy}{dx} = z + \frac{dz}{dx}x$.

Hosilaning ifodasini (1′) ga qo'ysak, o'zgaruvchilari ajraladigan $z + x\frac{dz}{dx} = f(1,\ z)$ tenglama hosil bo'ladi. O'zgaruvchilarni ajratib yozamiz:

$$x\frac{dz}{dx} = f(1,\ z) - z \quad \text{yoki} \quad \frac{dz}{f(1,\ z)-z} = \frac{dx}{x}.$$

Buni integrallaymiz: $\int\frac{dz}{f(1,\ z)-z} = \int\frac{dx}{x} + C$ yoki $\ln|x| = \int\frac{dz}{f(1,\ z)-z} + C.$

Integrallagandan keyin z o'rniga $\frac{x}{y}$ nisbatni qo'ysak, (1′) tenglamaning umumiy integrali hosil bo'ladi.

M i s o l. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2xy}$ tenglamaning umumiy integralini toping. Bu tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama. $y = zx$ almashtirish bajaramiz. U holda tenglama $\frac{2zdz}{1-z^2} = \frac{dx}{x}$ ko'rinishga keladi.

Tenglamani integrallaymiz: $\ln C_1 - \ln|1 - z^2| = \ln|x|$, bu yerdan

$$C_1 = |x| \cdot |1 - z^2| \text{ yoki } x(1 - z^2) = \pm C.$$

Endi y funksiyaga qaytsak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$C = x\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) \text{ yoki } x^2 - y^2 - Cx = 0.$$

11.1.6. BIR JINSLI TENGLAMAGA KELTIRILADIGAN TENGLAMALAR

Quyidagi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1} \tag{1}$$

ko'rinishdagi tenglama bir jinsli tenglamaga keltiriladi. Agar $c = c_1 = 0$ bo'lsa, (1) tenglama bir jinsli tenglama. Endi c va c_1 (yoki bulardan bittasi) noldan farqli bo'lsin.

O'zgaruvchilarni almashtiramiz: $x = x_1 + h$, $y = y_1 + k$, u holda

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}; \tag{2}$$

x, y va $\frac{dy}{dx}$ larning ifodalarini (1) tenglamaga qo'ysak:

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{ax_1+by_1+ch+bk+c}{a_1x_1+b_1y_1+a_1h+b_1k+c_1}; \tag{3}$$

h va k ni

$$\left.\begin{aligned} ah+bk+c=0,\\ a_1h+b_1k+c_1=0\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

tenglamalar o'rinli bo'ladigan qilib tanlaymiz. Bu shartda (3) tenglama $\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{ax_1+by_1}{a_1x_1+b_1y_1}$ bir jinsli tenglamaga aylanadi.

Bu tenglamani yechib, so'ngra (2) formulaga ko'ra x va y larga o'tsak, (1) tenglamaning yechimini hosil qilamiz.

Agar $ab_1-a_1b=0$ bo'lsa, (4) sistemaning yechimi yo'q. Ammo bu holda $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}$, ya'ni $a_1=\mu a$; $b_1=\mu b$ desak, (1) tenglama

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(ax+by)+c}{\mu(ax+by)+c_1} \tag{5}$$

ko'rinishga keladi.

Bundan $z=ax+by$ (6) almashtirish yordamida tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltiriladi, ya'ni

$$\frac{dz}{dx}=a+b\frac{dx}{dy}; \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{b}\cdot\frac{dz}{dx}-\frac{a}{b}. \tag{7}$$

(5) tenglamaga (6) va (7) ifodalarni qo'ysak, $\frac{1}{b}\cdot\frac{dz}{dx}-\frac{a}{b}=\frac{z+c}{\lambda z+c_1}$ tenglamani hosil qilamiz.

Bu esa o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama. (1) ni integrallashga o'xshash holda tubandagi tenglamani integrallaymiz:

$$\frac{dy}{dx}=b\left|\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right|.$$

M i s o l. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y-3}{x-2y-1}$ tenglamaning umumiy integralini toping.

Y e c h i s h. Buni bir jinsli tenglamaga keltirish uchun o'zgaruvchilarni almashtiramiz: $x=x_1+h$; $y=y_1+k$, u holda

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x_1+y_1+2h+k-7}{x_1-2y_1+h-2k-1}; \quad \begin{cases} h+k-7=0,\\ n-2k-1=0,\end{cases} \quad h=5; \quad k=-3;$$

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{2x_1 + y_1}{x_1 - 2y_1}; \qquad u = \frac{y_1}{x_1}; \qquad y_1 = ux_1; \qquad \frac{1-2u}{2(1+u^2)}du = \frac{dx_1}{x_1};$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg} u - \frac{1}{2}\ln|1+u^2| = \ln(x_1) + \ln|C|; \quad \operatorname{arctg} u = 2\ln|Cx_1\sqrt{1+u^2}|;$$

$$Cx_1\sqrt{1+u^2} = e^{\frac{1}{2}\operatorname{arctg} u},$$ bu yerda u o‘rniga $\frac{y_1}{x_1}$ ni qo‘yib,

$$C\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = e^{\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y_1}{x^1}}$$ ni hosil qilamiz.

Nihoyat x va y o‘zgaruvchilarga o‘tib, natijada

$$C\sqrt{(x-5)^2 + (y+3)^2} = e^{\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y+3}{x-5}}$$ umumiy integralni hosil qilamiz.

11.1.7. BIRINCHI TARTIBLI CHIZIQLI TENGLAMALAR

Ta’rif. Noma’lum funksiya va uning hosilasiga nisbatan chiziqli bo‘lgan quyidagi tenglama *birinchi tartibli chiziqli tenglama* deyiladi:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \tag{1}$$

bunda $P(x)$ va $Q(x)$ lar x ning berilgan uzluksiz funksiyalari (yoki o‘zgarmas sonlar). (1) chiziqli tenglama yechimini ikkita funksiya ko‘paytmasi shaklida izlaymiz: $y = u(x)v(x)$; $y' = (u \cdot v)' = u'v + uv'$

$$\text{yoki} \quad y' = \frac{du}{dx}v + \frac{dv}{dx}u; \tag{2}$$

buni (1) ga qo‘yamiz: $u\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}v + puv = Q$ yoki

$$u\left(\frac{du}{dx} + pv\right) + v\frac{dv}{dx} = Q. \tag{3}$$

Endi v ni shunday tanlaymizki,

$$v\frac{du}{dx} + pv = 0 \tag{4}$$

tenglama o‘rinli bo‘lsin.

$$\frac{dv}{v} = -pdx \qquad \text{yoki} \qquad v = C_1 e^{-\int pdx}.$$

$$-\ln|C_1| + \ln|v| = -\int pdx.$$

(4) tenglamaning noldan farqli biror yechimini topish yetarli bo‘lgani uchun

$$v(x) = e^{-\int p dx} \tag{5}$$

deb olamiz.

v ning topilgan bu qiymatini (3) ga qo'yib, hosil bo'lgan tenglamani yechamiz: $\frac{du}{dx} + pv = 0$; $V(x)\frac{du}{dx} = Q(x)$; $\frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{V(x)}$ tenglamani hosil qilamiz.

u va v ning qiymatini (2) ga qo'ysak, $y = V(x)\left[\int \frac{Q(x)}{V(x)} dx + C\right]$ yoki

$$y = V(x)\int \frac{Q(x)}{V(x)} dx + CV(x) \tag{6}$$

hosil bo'ladi. Bu berilgan tenglamaning umumiy yechimi.

M i s o l. $y' + y\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$ tenglamani yeching.

Y e c h i s h. Berilgan tenglama chiziqli. Bu tenglamani yechish uchun yechimni $y = u \cdot v$ ko'rinishda izlaymiz. Agar $y = u \cdot v$ bo'lsa, u holda $y' = u'v + uv'$ bo'lib, berilgan tenglama quyidagi ko'rinishini oladi:

$$u'v + uv' + uv\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x} \quad \text{yoki} \quad v(u' + uv\operatorname{tg} x) + uv' = \frac{1}{\cos x}, \tag{a}$$

bu yerda funksiyani

$$u' + u\operatorname{tg} x = 0 \tag{b}$$

tenglik o'rinli bo'ladigan qilib tanlaymiz. U holda (a) tenglama quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$uv' = \frac{1}{\cos x}. \tag{d}$$

(b) tenglamani yechamiz: $\frac{du}{dx} = -u\operatorname{tg} x$; $\frac{du}{u} = -\operatorname{tg} x\, dx$; $\int \frac{du}{u} = -\int \operatorname{tg} x\, dx$; $\ln u = \ln\cos x$; $u = \cos x$ (bu yechim $C = 0$ bo'lgan holga mos xususiy yechim hisoblanadi);

$u = \cos x$ ni (d) tenglamaga olib borib qo'ysak, $\cos x \frac{dv}{dx} = \frac{1}{\cos x}$ ga ega bo'lamiz. Bundan esa $\frac{dv}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$; $dv = \frac{dx}{\cos^2 x}$; $\int dv = \int \frac{dx}{\cos^2 x}$; $v = \operatorname{tg} x + C$.

Demak, $y = u \cdot v = \cos x(\operatorname{tg} x + C)$ yoki u berilgan tenglamani umumiy yechimi.

Berilgan tenglamaning umumiy yechimini (6) formuladan foydalanib ham topish mumkin.

M i s o l. Shartga ko‘ra $p(x) = \operatorname{tg} x$; $Q(x) = \frac{1}{\cos x}$, u holda $y = e^{-\int \operatorname{tg} dx}\left[\int \frac{1}{\cos x} \cdot e^{-\ln \cos x} dx + C\right]$, bu yerda $\int \operatorname{tg} x = -\ln \cos x$ bo‘lganidan:

$$y = e^{\ln \cos x}\left[\int \frac{1}{\cos x} \cdot e^{-\ln \cos x} dx + C\right] = \cos x\left[\int \frac{dx}{\cos^2 x} + C\right]$$

yoki

$$y = \cos x(\operatorname{tg} x + C) = C\cos x + \sin x.$$

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Qanday tenglama differensial tenglama deyiladi?
2. Differensial tenglama tartibi deganda nimani tushunasiz?
3. Differensial tenglamaning umumiy va xususiy yechimlari deb qanday yechimlarga aytiladi?
4. Birinchi tartibli differensial tenglama yechimi mavjudligi va yagonaligi to‘g‘risidagi teoremani ifodalang.
5. Umumiy va xususiy yechimlarni geometrik nuqtayi nazardan talqin qilib bering.
6. Birinchi tartibli differensial tenglamalarni yechish usullarini ko‘rsating:
   a) o‘zgaruvchilari ajralgan va ajraladigan tenglamalar uchun;
   b) chiziqli tenglamalar uchun;
   d) bir jinsli tenglamalar uchun.

11.2. IKKINCHI TARTIBLI CHIZIQLI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI YECHISH USULLARI

11.2.1. IKKINCHI TARTIBLI CHIZIQLI DIFFERENSIAL TENGLAMA UCHUN KOSHI MASALASI

Tubandagi ko‘rinishdagi tenglama ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama deyiladi:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \tag{1}$$

Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimini birinchi tartibli differensial tenglamaning umumiy yechimini ko‘rsatgandek, ko‘rsatib bo‘lmaydi. Shuning uchun ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamaning tatbiq uchun zarur hisoblangan xususiy hollarini ko‘rib o‘tamiz. Jumladan, o‘zgarmas koeffitsiyentli ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamani qaraymiz. Uning umumiy ko‘rinishi tubandagicha:

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{2}$$

bu yerda: p, q lar o'zgarmas kattaliklar.

Agar $f(x) \neq 0$ bo'lsa, (2) tenglama ikkinchi tartibli *bir jinslimas* chiziqli differensial tenglama deyiladi.

Agar $f(x) = 0$ bo'lsa, (2) *bir jinsli* chiziqli tenglama deyiladi:

$$y'' + py' + qy = 0; \tag{3}$$

(2) va (3) differensial tenglamalarni yechishni o'rganishdan oldin chiziqli bog'liq hamda chiziqli bog'liq bo'lmagan (erkli) funksiyalar tushunchasi bilan tanishamiz.

$y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar $[a;\ b]$ kesmada berilgan bo'lsin. Agar shunday o'zgarmas α_1 va α_2 sonlar uchun (ulardan hech bo'lmaganda bittasi noldan farqli)

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0 \tag{4}$$

ayniyat o'rinli bo'lsa, u holda $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar *chiziqli bog'liq* funksiyalar deyiladi.

Agar (4) ayniyat faqat $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ bo'lganda o'rinli bo'lsa, u holda $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar *chiziqli bog'liq bo'lmagan* erkli funksiyalar deyiladi.

Boshqacha aytganda, ikkita $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \alpha$, ya'ni ularning nisbati o'zgarmas songa teng bo'lmaganda chiziqli erkli bo'ladi.

M i s o l. $y_1(x) = \sin x$, $y_2(x) = \cos x$ funksiyalar chiziqli erkli funksiyalar, chunki $\alpha_1 \cdot \sin x + \alpha_2 \cdot \cos x = 0$ ayniyat faqat $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ bo'lgandagina o'rinli bo'ladi.

Agar $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar chiziqli erkli funksiyalar bo'lsa, ulardan hech biri aynan nolga teng bo'lmaydi.

Endi (2) va (3) differensial tenglamalarni yechish bilan shug'ullanamiz. Dastlab

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{5}$$

ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli differensial tenglamani qaraymiz.

1-teorema. *Agar $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar (5) tenglamaning chiziqli erkli xususiy yechimlari bo'lsa, u holda (5) tenglamaning umumiy yechimi*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \tag{6}$$

bo'ladi, bunda C_1, C_2 — ixtiyoriy o'zgarmas sonlar.

I s b o t. $y_1(x)$ va $y_2(x)$ (5) tenglamaning xususiy yechimlari bo'lsa, u holda bu funksiyalar (5) tenglamani qanoatlantiradi:

$$\begin{aligned} &y_1''(x) + p(x)\cdot y_1'(x) + q(x)\cdot y_1(x) = 0,\\ &y_2''(x) + p(x)\cdot y_2'(x) + q(x)\cdot y_2(x) = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Tubandagi $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ funksiya ham (5) tenglamaning yechimi bo'ladi. Haqiqatan ham, bu funksiya hamda uning hosilalari

$$[C_1y_1(x) + C_2y_2(x)]' = C_1y_1'(x) + C_2y_2'(x)$$

$$[C_1y_1(x) + C_2y_2(x)]'' = C_1y_1''(x) + C_2y_2''(x) \quad \text{uchun}$$

$$C_1y_1''(x)+C_2y_2''(x)+p(x)[C_1y_1(x)+C_2y_2(x)]'+q(x)[C_1y_1(x)+C_2y_2(x)]''=$$

$$= C_1y_1''(x) + p(x)C_1y_1'(x) + q(x)C_1y_1(x) + C_2y_2''(x) + p(x)C_2y_2'(x) +$$

$$+ q(x)C_2y_2(x) = C_1[y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)] + C_2[y_2''(x) +$$

$$+p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x)]$$

bo'lib, (7) munosabatga asosan

$$[C_1y_1(x) + C_2y_2(x)]'' + p(x)\cdot[C_1y_1(x) + C_2y_2(x)]' +$$
$$+q(x)[C_1y_1(x) + C_2y_2(x)] = 0$$

bo'ladi.

Bu esa $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ ning (5) tenglamaning yechimi ekanini bildiradi. Demak, $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ yechim berilgan

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi. Ikkinchi tartibli

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{8}$$

tenglamaning umumiy yechimi haqida ushbu teorema o'rinli.

2-teorema. *(8) tenglamaning umumiy yechimi shu tenglama xususiy yechimi bilan (5) tenglamaning umumiy yechimi yig'indisiga teng bo'ladi:*

$$y_{\text{umum}} = y_{\text{um. bir jins}} + \bar{y},$$

bu yerda $\bar{y}$ — (8) tenglamaning xususiy yechimi.

$y'' + py' + qy = f(x)$ tenglamaning $\left. y\right|_{x=x_0} = y_0$, $y'(x_0) = v_0$ shartni qanoatlantiruvchi yechimini izlash masalasi *Koshi masalasi* deyiladi.

11.2.2. O'ZGARMAS KOEFFITSIYENTLI IKKINCHI TARTIBLI BIR JINSLI CHIZIQLI TENGLAMALAR

Ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli tenglama

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{1}$$

berilgan bo'lsin, bunda p va q o'zgarmas haqiqiy sonlar.

Yuqorida isbot qilingan teoremaga asosan bu tenglamaning umumiy integralini topish uchun uning ikkita chiziqli erkli xususiy yechimini topamiz.

Xususiy yechimlarini

$$y = e^{kx} \tag{2}$$

(bunda k = const) ko'rinishida izlaymiz, bu holda $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$.

Bularni (1) tenglamaga qo'ysak, tenglama $e^{kx}(k^2+pk+q)=0$ ko'rinishni oladi. Ammo $e^{kx} \neq 0$ bo'lgani uchun:

$$(k^2 + pk + q) = 0. \tag{3}$$

Demak, k (3) tenglamani qanoatlantirsa, u holda e^{kx} (1) tenglamaning yechimi bo'ladi. (3) tenglama (1) tenglamaning *xarakteristik tenglamasi* deyiladi.

Xarakteristik tenglama ikkita ildizi bo'lgan kvadrat tenglamadir, bu ildizlarni k_1 va k_2 bilan belgilaymiz:

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}; \qquad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Bunda quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) k_1 va k_2 — haqiqiy, bir-biriga teng bo'lmagan sonlar ($k_1 \neq k_2$);

b) k_1 va k_2 — kompleks sonlar;

d) k_1 va k_2 — haqiqiy va bir-biriga teng sonlar ($k_1 = k_2$).

Bu hollarni ayrim-ayrim qaraymiz.

a) *xarakteristik tenglamaning ildizlari haqiqiy va har xil* ($k_1 \neq k_2$) *bo'lgan hol*

Bu holda $y_1 = e^{k_1x}$; $y_2 = e^{k_2x}$; funksiyalar xususiy yechimlar bo'ladi. Bu yechimlar $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_2x}}{e^{k_1x}} = e^{(k_2-k_1)x} \neq \text{const}$ bo'lgani uchun chiziqli erkli bo'ladi.

Demak, umumiy integral

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x} \tag{2}$$

ko'rinishda bo'ladi.

M i s o l. $y'' + 5y' - 6y = 0$ tenglamaning umumiy integralini toping. Tenglamaning xarakteristik tenglamasini tuzib ildizlarini topamiz:

$k^2 + 5k - 6 = 0$; $k_1 = -6$, $k_2 = 1$. Ildizlar haqiqiy har xil, demak, umumiy integral: $y = C_1 e^{-6x} + C_2 e^x$.

b) *xarakteristik tenglamaning ildizlari kompleks, qo'shma*

$$k_1 = \alpha + i\beta; \quad k_2 = \alpha - i\beta;$$

bu yerda $\alpha = -\frac{p}{2}$; $\beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$.

Xususiy yechimlarni quyidagi shaklda yozish mumkin:

$$y_1 = e^{k_1 x} = e^{(\alpha + i\beta)} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x}; \; y_2 = e^{k_2 x} = e^{(\alpha - i\beta)} = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x}.$$

Bu ifodaga ushbu $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

Eyler formulasini tatbiq qilib, uni quyidagicha yozamiz:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x; \quad y_2 = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Ma'lumki, bir jinsli tenglama yechimlarining chiziqli kombinatsiyasi ham tenglamaning yechimi bo'ladi. Shuning uchun quyidagi

$$\bar{y}_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{ax}\cos\beta x, \quad \bar{y}_2 = \frac{y_1 - y_2}{2} = e^{ax}\sin\beta x$$

funksiyalar ham tenglamaning yechimlari bo'ladi. Ular chiziqli erkli, chunki

$$\frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_2} = \operatorname{ctg}\beta x \neq \text{const}.$$

Demak, $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$ funksiyalar (1) tenglama yechimlarining fundamental sistemasini tashkil etadi. Shunday qilib, bu funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasi

$$y = e^{ax}(C_1 \cdot \cos\beta x + C_2 \cdot \sin\beta x) \tag{3}$$

berilgan tenglamaning umumiy yechimini beradi.

M i s o l. Ushbu $y'' + 2y' + 5y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Y e c h i s h. $y'' + 2y' + 5y = 0$ differensial tenglama uchun xarakteristik tenglama $k^2 + 2k + 5 = 0$ bo'ladi.

Uning ildizlari: $k_1 = -1 - 2i$; $k_2 = -1 + 2i$; $\alpha = -1$; $\beta = 2$.

Yechimlarning fundamental sistemasi: $y_1 = e^{-x} \cdot \cos 2x$; $y_2 = e^{-x} \cdot \sin 2x$.

Berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi:

$$y_1 = e^{-x}(C_1 \cdot \cos 2x + C_2 \cdot \sin 2x);$$

(3) yechimning muhim xususiy holi xarakteristik tenglama ildizlarining sof mavhum sonlardan iborat boʻlgan holidir, bu (1) tenglama $p = 0$ boʻlgan holda oʻrinli:

$$y'' + qy = 0. \tag{4}$$

Xarakteristik tenglamasini tuzamiz:

$$k^2 + q = 0; \quad q > 0$$

$k_{1,2} = \pm i\sqrt{q} = \pm\beta, \alpha = 0$ boʻlsa, (3) tenglama quyidagi koʻrinishni oladi:

$$y = C_1 \cdot \cos \beta x + C_2 \cdot \sin \beta x. \tag{5}$$

d) *xarakteristik tenglamaning ildizlari haqiqiy va teng (karrali)*

$k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$ — bitta xususiy yechim. $y_1 = e^{k_1 x}$ yuqoridagi mulohazalar asosida hosil qilinadi.

$e^{k_2 x}$ funksiya ikkinchi xususiy yechim sifatida qaralishi mumkin emas, chunki $e^{k_2 x} = e^{k_1 x}$.

Shunday xususiy yechim topish kerakki, u birinchi yechim $y_1 = e^{k_1 x}$ bilan chiziqli erkli boʻlsin. Ikkinchi yechim $y_2 = xe^{k_2 x}$ funksiya boʻlishi mumkinligini koʻrsataylik. U y_1 bilan chiziqli erkli, chunki $\frac{y_1}{y_2} = \frac{xe^{k_1 x}}{e^{k_1 x}} = x \neq \text{const}$.

Bu $y_2 = xe^{k_1 x}$ funksiya (1) tenglamani qanoatlantirishini tekshirish qoldi. Uni ikki marta differensiallaymiz:

$$y_2' = e^{k_1 x}(1 + k_1 x), \qquad y_2'' = e^{k_1 x}(k_1^2 x + 2k_1);$$

y_2, y_2', y_2'' larni berilgan (1) tenglamaga qoʻyamiz:

$$e^{k_1 x}[(k_1^2 x + 2k_1) + p(1 + k_1 x) + qx] = 0.$$

Qoʻshiluvchilarni qayta guruhlaymiz va $e^{k_1 x} \neq 0$ ga qisqartiramiz:

$$x(k_1^2 + pk_1 + q) + (2k_1 + p) = 0; \tag{6}$$

k_1 xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lgani uchun, birinchi qavs aynan nolga teng, ya'ni $k_1^2 + pk_1 + q = 0$;

k_1 — karrali ildiz, ya'ni $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$ yoki $2k_1 = -p$ bo'lgani uchun, (6) dagi ikkinchi qavs ham aynan nolga teng, ya'ni $2k_1 + p = 0$.

Demak, $y_2 = xe^{k_2 x}$ funksiya (1) tenglamaning yechimi bo'ladi va $y_1 = e^{k_1 x}$ bilan chiziqli erkli. Shunday qilib, $y_1 = e^{k_1 x}$ va $y_2 = xe^{k_2 x}$ yechimlar (1) tenglama yechimlarining fundamental sistemasini tashkil etadi.

Demak, bu funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasini tashkil etadi, bu funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasi

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x) \qquad (7)$$

(1) tenglamaning umumiy yechimini beradi.

M i s o l. Ushbu $y'' + 2y' + y = 0$ tenglamaning umumiy integralini toping. Berilgan tenglamaning xarakteristik tenglamasini tuzamiz. Xarakteristik tenglama $k^2 + 2k + 1 = 0$ ko'rinishda bo'ladi. Uning ildizlari: $k_1 = k_2 = -1$.

Fundamental yechimlar sistemasi: $y_1 = e^x$ va $y_2 = xe^{-x}$.

Differensial tenglamaning umumiy yechimi quyidagi ko'rinishda bo'ladi: $y = e^{-x}(C_1 + C_2 x)$.

11.2.3. BIR JINSLIMAS TENGLAMANI KVAZIKO'PHAD HOL UCHUN XUSUSIY YECHIMI

Bizga oldingi 1-mavzudagi 2-teoremadan ma'lumki,

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (1)$$

bir jinslimas tenglamaning yechimi (1) tenglamaga mos

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (2)$$

bir jinsli tenglama umumiy yechimi bilan bir jinsli mos tenglamaning bitta xususiy yechimi yig'indisidan iborat. Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topishni ko'rib o'tdik. (1) tenglama xususiy yechimini topishni qaraymiz.

Biz differensial tenglamaning texnikada ko'p qo'llaniladigan, ya'ni o'ng tomoni kvaziko'phad bo'lgan bir jinslimas tenglamaning xususiy yechimini topishni ko'ramiz.

Aytaylik, $f(x) = P_n(x)e^{\gamma x}$ bo'lsin. Bu holda (1) tenglamaning xususiy yechimini quyidagi uchta ko'rinishdan biri shaklida izlaymiz:

a) agar γ xarakteristik tenglama ildizlari k_1 va k_2 larni bittasiga ham teng bo'lmasa, xususiy yechim $y_1(x) = Q_m(x)e^{\gamma x}$ ko'rinishda izlanadi; bu yerda $Q_m(x)$ — noma'lum koeffitsiyentli m-tartibli ko'phad.

b) agar γ xarakteristik tenglama ildizlari k_1 va k_2 lardan biriga teng bo'lsa, u holda yechimni $y_1(x) = xQ_m(x)e^{\gamma x}$ ko'rinishda izlaymiz;

d) agar γ xarakteristik tenglamaning karrali ildizi k ga teng bo'lsa, u holda yechimni $y_1(x) = x^2Q_m(x)e^{\gamma x}$ ko'rinishda izlaymiz.

Bularga misollar keltirib $Q_m(x)$ ko'phadning noma'lum koeffitsiyentlarini topishni ko'rsatamiz.

1-m i s o l. $y'' + 3y' + 2y = 12$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Y e c h i s h. $k^2 + 3k + 2 = 0$ xarakteristik tenglamaning ildizlari: $k_1 = -1$; $k_2 = -2$. Bu holda bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$ bo'ladi. Berilgan bir jinslimas tenglamaning o'ng tomonini nol ko'rsatkichli kvaziko'phad deb qarash mumkin, ya'ni $P_0(x)e^{ox} = 12e^{ox} = 12$.

Shu sababli, xususiy yechimni $\bar{y}(x) = Q_0(x) = A_0$ ko'rinishda izlaymiz. A_0 — noma'lum koeffitsiyent. Bu yechimni berilgan tenglamaga qo'yamiz: $2A_0 = 12$, bundan $A_0 = 6$. Shunday qilib, berilgan tenglamaning umumiy yechimi $y = y + \bar{y}$, ya'ni $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + 6$ bo'ladi.

2-m i s o l. $y'' - y' - 6y = 12x^2 - 2x + 1$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Y e c h i s h. Dastlab berilgan tenglamaga mos bir jinsli $y'' - y' - 6y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini topamiz. $k^2 - k - 6 = 0$ xarakteristik tenglamaning ildizlari $k_1 = -2$ va $k_2 = 3$ bo'lgani uchun umumiy yechim $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{3x}$ bo'ladi.

Berilgan tenglamaning o'ng tomoni ikkinchi darajali ko'phad bo'lgani uchun, uning xususiy yechimini ikkinchi darajali ko'phad shaklida izlaymiz, ya'ni

$$\bar{y} = Ax^2 + Bx + C.$$

Bu ifodani differensiallab, quyidagilarni topamiz va berilgan tenglamaga qo'yamiz:

$$\bar{y}' = 2Ax + B;\ \bar{y}'' = 2A,$$

$$2A - 2Ax - B - 6Ax^2 - 6Bx - 6C = 12x^2 - 2x + 1$$

yoki $-6Ax^2 + (-2A - 6B)x + (2A - B - 6C) = 12x^2 - 2x + 1.$

Bundan A, B, C koeffitsiyentlarni topish uchun tubandagi sistemani tuzamiz:

$$\begin{cases} -6A = 12, \\ -2A - 6B = -2, \\ 2A - B - 6C = 1. \end{cases}$$

Bu sistemani yechsak: $A = -2$; $B = 1$; $C = -1$.

Demak, $\bar{y} = -2x^2 + x - 1$.

Berilgan tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha bo‘ladi:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} - 2x^2 + x - 1.$$

3-m i s o l. $y'' + y' = 6x^2 - 7$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Y e c h i s h. Dastlab berilgan tenglamaga mos bir jinsli $y'' + y' = 0$ tenglamaning umumiy yechimini topamiz. $k^2 + k = 0$ xarakteristik tenglamaning ildizlari $k_1 = 0$ va $k_2 = -1$ bo‘lgani uchun umumiy yechim $y = C_1 + C_2 e^{-x}$ ko‘rinishda bo‘ladi.

Berilgan tenglamaning o‘ng tomoni ikkinchi darajali ko‘phad. Xarakteristik tenglamaning bitta ildizi nol bo‘lganligi sababli, bir jinslimas tenglamaning xususiy yechimini $\bar{y} = x(Ax^2 + Bx + C)$ ko‘rinishda izlaymiz.

Bu ifodani differensiallab, berilgan tenglamaga qo‘yamiz:

$$\bar{y}' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \quad \bar{y}'' = 6Ax + 2B;$$
$$6Ax + 2B + 3Ax^2 + 2Bx + C = 6x^2 - 7$$

yoki

$$3Ax^2 + (6A + 2B)x + (2B + C) = 6x^2 - 7.$$

x o‘zgaruvchining bir xil ko‘rsatkichlari oldidagi koeffitsiyentlarni tenglashtirib, quyidagi sistemaga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} 3A = 6, \\ 6A + 2B = 0, \\ 2B + C = 7. \end{cases}$$

Sistemani yechib A, B, C larni topamiz: $A = 2$, $B = -6$, $C = 5$.

Shunday qilib xususiy yechim $\bar{y} = x(2x^2 - 6x + 5)$ ko‘rinishda bo‘ladi.

Berilgan tenglamaning umumiy yechimi $\bar{y} = C_1 + C_2\, e^{-x} + x(2x^2 - 6x + 5)$.

4-m i s o l. $y'' - 7y' + 10y = 4e^{3x}$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Dastlab $y''-7y'+10y=0$ bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topamiz. $k^2-7k+10=0$ xarakteristik tenglamaning ildizlari $k_1=2$ va $k_2=5$ bo'lganligi sababli, uning umumiy yechimi $y=C_1e^{2x}+C_2e^{5x}$ bo'ladi.

Berilgan bir jinslimas tenglamaning o'ng tomoni ko'rsatkichli funksiya. $\gamma=3$ ga teng bo'lib, xarakteristik tenglama ildizlarini bittasi ham unga teng emas. Shuning uchun uni $\bar{y}=Ae^{3x}$ ko'rinishda izlaymiz. Bu ifodani differensiallab, y, y', y'' larni berilgan tenglamaga qo'yib, A koeffitsiyentni hisoblaymiz:

$$9Ae^{3x}-21Ae^{3x}+10Ae^{3x}=4Ae^{3x};\quad -2A=4,\ A=-2.$$

Bundan xususiy yechim $\bar{y}=-2e^{3x}$ ga teng. Berilgan tenglamaning umumiy yechimi esa tubandagi ko'rinishda bo'ladi:

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{5x}-2e^{3x}.$$

5-misol. $y''-y'-2y=9e^{2x}$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Dastlab $y''-y'-2y=0$ bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topamiz. $k^2-k-2=0$ xarakteristik tenglama $k_1=-1$ va $k_2=2$ ildizlarga ega. U holda umumiy yechim $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$ bo'ladi.

Berilgan tenglamaning o'ng tomoni ko'rsatkichli funksiya. Bu holda $\gamma=2$ ko'rsatkich xarakteristik tenglamaning bitta ildiziga teng. Shu sababli, xususiy yechimni $\bar{y}=x\,Ae^{2x}$ ko'rinishda izlaymiz. Bu ifodani ikki marta differensiallaymiz:

$$\bar{y}'=Ae^{2x}+x2Ae^{2x};\quad \bar{y}''=2Ae^{2x}+2Ae^{2x}+4Axe^{2x};$$

$\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ larni berilgan tenglamaga qo'yib, A koeffitsiyentni aniqlaymiz. $4Ae^{2x}+4Axe^{2x}-Ae^{2x}-2Axe^{2x}-2Axe^{2x}=9e^{2x}$; $3A=9$; $A=3$.

Xususiy yechim $\bar{y}=3xe^{2x}$. Berilgan tenglamaning umumiy yechimi $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+3xe^{2x}$ ga teng.

6-misol. $y''-7y'+10y=4e^{3x}$ tenglamaning $y(0)=2$; $y(0)=13$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini toping.

Yechish. $y''-7y'+10y=4e^{3x}$ tenglamaning umumiy yechimi 4-misoldan ma'lum:

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{5x}-2e^{3x}. \tag{*}$$

Boshlang'ich shartlardan foydalanib C_1 va C_2 ixtiyoriy o'zgarmaslarning qiymatlarini topamiz. Umumiy yechimni differensiallaymiz:

$$y' = 2C_1e^{2x} + 5C_2e^{5x} - 6e^{3x}. \qquad (**)$$

(*) tenglamaga $x = 0$ va $y = 2$ larni qo'yamiz:

$2 = C_1e^{2\cdot 0} + C_2e^{5\cdot 0} - 2e^{3\cdot 0} = C_1 + C_2 - 2$, $C_1 + C_2 = 4$ ga ega bo'lamiz.

(**) ga $x = 0$ va $y' = 13$ ni qo'yamiz. $13 = 2C_1e^{2\cdot 0} + 5C_2e^{5\cdot 0} - 6e^{3\cdot 0} = 2C_1 + 5C_2 - 6$;

$2C_1 + 5C_2 = 19$; C_1 va C_2 larni topish uchun tubandagi sistemani tuzamiz:

$\begin{cases} C_1 + C_2 = 4 \\ 2C_1 + 5C_2 = 19 \end{cases}$ sistemani yechib C_1 va C_2 larni topamiz:

$$C_1 = \frac{1}{3};\ C_2 = \frac{11}{3}.$$

Demak, boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechim quyidagi ko'rinishda bo'lar ekan:

$$y = \frac{1}{3}e^{2x} + \frac{11}{3}e^{5x} - 2e^{3x}.$$

7-misol. $y'' + 2y' + 5y = 3\sin x$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Dastlab $y'' + 2y' + 5y = 0$ bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topamiz. $k^2 + 2k + 5 = 0$ xarakteristik tenglamaning ildizlari $k_1 = -1 + 2i$ va $k_2 = -1 - 2i$. Shuning uchun umumiy yechim: $y = C_1e^{-x}\cos 2x + C_2e^{-x}\sin 2x$ ko'rinishda bo'ladi. Berilgan tenglamani quyidagi ko'rinishda yozamiz: $y'' + 2y' + 5y = 3e^{ix}$ (*) tenglamaning xususiy yechimini $\bar{y}(x) = u(x) + iv(x)$ ko'rinishida izlaymiz, chunki buni mavhum qismi berilgan tenglamani qanoatlantiradi. Haqiqatan ham, agar $(u + iv)'' + 2(u + iv)' + 5(u + iv) = 3\cos x + 3\sin x$ bo'lsa, u holda $v'' + 2v' + 5v = 3\sin x$ bo'ladi. (*) tenglamaning yechimini $\bar{y}(x) = A_0e^{ix}$ ko'rinishda izlaymiz. $k = i \neq k_1, k_2$, yuqoridagi ifodani (*) tenglamaga qo'yamiz: $(4 + 2i)A = 3$ yoki $A_0 = \frac{3}{4+2i} = \frac{6-3i}{10}$; shunday qilib, xususiy yechim

$$\bar{y}(x) = \frac{6-3i}{10}(\cos t + i\sin t) + \frac{3}{5}\cos t + \frac{3}{10}\sin t + i\left(\frac{3}{5}\sin t - \frac{3}{10}\cos t\right).$$

Bu ifodaning mavhum qismi berilgan tenglamaning xususiy yechimi bo'ladi. Berilgan tenglamaning umumiy yechimi:

$$y(x) = C_1e^{-x}\cos 2x + C_2e^{-x}\sin 2x + \frac{3}{5}\sin x - \frac{3}{10}\cos x.$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Ikkinchi tartibli differensial tenglama uchun Koshi masalasi nimadan iborat?
2. Ikkinchi tartibli differensial tenglama uchun boshlang'ich shartning geometrik ma'nosi nimadan iborat?
3. Ikkinchi tartibli differensial tenglamaga ta'rif bering.
4. O'zgarmas koeffitsiyentli ikkinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamaning umumiy yechimini topish usulini tushuntirib bering.
5. O'zgarmas koeffitsiyentli ikkinchi tartibli bir jinsli differensial tenglama umumiy yechimining uning xarakteristik tenglamasi ildizlariga bog'liq bo'lgan hollari formulalarini yozing.

11.3. TEBRANISHNING DIFFERENSIAL TENGLAMALARI

11.3.1. TEBRANISHLARNING DIFFERENSIAL TENGLAMASIGA OLIB KELUVCHI MASALALAR

1-masala. k bikrlikka ega prujinada m massali yukning to'g'ri chiziqli tebranma harakatini qaraymiz.

Yukning to'g'ri chiziqdagi holati t vaqtga bog'liq bo'lgan x koordinatasi bilan xarakterlanadi, ya'ni $x = x(t)$. Prujina cho'zilmasdan oldin yukning turgan holatini koordinatalar boshi O nuqta deb olamiz. Agar prujinani cho'zmasdan oldin uning uzunligini l desak, u holda prujinaning ikkinchi uchi mahkamlangan nuqta koordinatasi $-l$ bo'ladi. Yukning holatini aniqlovchi x koordinata prujina uzunligi o'zgarishiga bog'liq bo'ladi. Uncha katta bo'lmagan cho'zilishda, prujina tomonidan yukka ta'sir qiluvchi kuch Guk qonuniga ko'ra $F = -kx$ ga teng (150-chizma).

Bu holda manfiy ishoraning qo'yilishiga sabab prujina cho'zilishiga F kuch qarshi yo'nalgan.

Tezlik ta'rifiga ko'ra $V = \frac{dx}{dt}$ ga teng. Bu holda Nyuton tenglamasi quyidagi ko'rinishni oladi: $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$ yoki

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \qquad (1)$$

Bu yerda: m — yukning massasi, k — prujinaning bikrligi, $x = x(t)$ — izlanayotgan funksiya.

Agar yukka tashqaridan muhitning qarshilik kuchi ham ta'sir qilsa, (1) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$x'' + \frac{\rho}{m} \cdot x' + \frac{k}{m} x = 0, \qquad (2)$$

bu yerda: ρ — yukka muhit tomonidan qarshilikni xarakterlovchi kattalik. Agar yukka bulardan tashqari tebranma *F(t)* kuchlar ta'sir qilsa, u holda (2) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$x'' + \frac{\rho}{m} \cdot x' + \frac{k}{m} x = \frac{F(t)}{m}. \qquad (3)$$

(3) — yukning tebranma harakat tenglamasi. (1) va (2) tenglamalar (3) umumiy tenglamaning xususiy hollari bo'lib, (1) tenglamada tashqi ta'sir va qarshilik hisobga olinmagan.

Bu ikki tenglama *erkin tebranish tenglamalari* deyiladi.

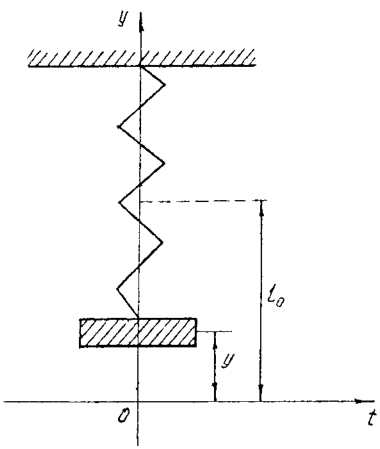
(3) tenglama — o'zgarmas koeffitsiyentli ikkinchi tartibli differensial tenglama *majburiy tebranishlar tenglamasi* deyiladi.

2-m a s a l a. Prujina uchiga osilgan m massali moddiy nuqta (yuk) vertikal to'g'ri chiziq bo'ylab harakatlanadi. Yukning harakat qonunini aniqlash talab qilinadi. Muvozanat holatda yuk og'irligi prujinaning elastiklik kuchi bilan muvozanatlashadi, deb faraz qilamiz. Koordinatalar boshini yukning muvozanat holati bilan ustma-ust tushiramiz. Oy o'qni yuk harakat qilayotgan to'g'ri chiziq bo'ylab vertikal pastga yo'naltiramiz (151-chizma). Yukning vaqtning istalgan t momentidagi vaziyati yukning koordinatalar boshidagi chetlanishi y bilan aniqlanadi. Yukning harakat qonunini topish uchun y chetlanish (og'ish) ning t vaqtga bog'lanishini aniqlash kerak.

Yukka quyidagi kuchlar ta'sir qiladi:

1) yukni boshlang'ich vaziyatga qaytarishga harakat qiluvchi tiklash kuchi F_1. Bu kuch Oy o'q bo'ylab yo'nalgan va uning bu o'qqa proyeksiyasi yukning muvozanat holatidan chetlanishiga proporsional: $F_1 = -ky$. Bu yerdagi $k(k > 0)$ son *tiklash koeffitsiyenti* deyiladi.

Kuch proyeksiyasi F_1 ning ifodasidagi «minus» ishorasi tiklash kuchi prujina deformatsiyasiga qarama-qarshi tomonga yo'nalganini ko'rsatadi;



151-chizma.

2) yukli prujina joylashgan muhitning qarshilik kuchi F_2 yuk harakati tezligi vektoriga qarama-qarshi

yo‘nalgan. Tajribaning ko‘rsatishicha, F_2 kuchning miqdori yuk tezligining kattaligi V ga proporsionaldir. Shuning uchun F_2 kuchning Oy o‘qqa proyeksiyasi $F_{2y} = -\lambda V$ (bu yerda $\lambda > 0$) yoki $F_{2y} = -\lambda \frac{dy}{dt}$ ko‘rinishida yoziladi.

Yukning og‘irlik kuchini hisobga olmaymiz, chunki u prujinaning elastiklik kuchi bilan muvozanatlashadi, prujinaning og‘irligini esa yo‘q deb hisoblaymiz.

Yuk harakatining differensial tenglamasini tuzish uchun Nyutonning ikkinchi qonunidan foydalanamiz:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}, \tag{4}$$

bu yerda: $\vec{a}$ — tezlanish vektori, $\sum \vec{F}$ — moddiy nuqtaga ta’sir etuvchi kuchlar yig‘indisi.

Bizning holda moddiy nuqtaga (yukka) Oy o‘q bo‘ylab yo‘nalgan $\vec{F_1}$ va $\vec{F_2}$ ikkita kuch ta’sir etadi. (4) tenglikning ikkala tomonidagi vektorni Oy o‘qqa proyeksiyalab va tezlanish vektori $\vec{a}$ ning Oy o‘qqa proyeksiyasi $\frac{d^2y}{dt^2}$ ga teng ekanini e’tiborga olib, izlanayotgan differensial tenglamani hosil qilamiz:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -ky - \lambda\frac{dx}{dt} \quad \text{yoki} \quad m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} + ky = 0. \tag{5}$$

(5) — o‘zgarmas koeffitsiyentli ikkinchi tartibli tenglamadir va u *erkin tebranishlar tenglamasi* deyiladi.

Agar yukka bundan tashqari Oy o‘q bo‘yicha yo‘nalgan tashqi $F(t)$ «qo‘zgatuvchi» kuch ta’sir etsa va uning $F(t)$ kattaligi t vaqtning berilgan funksiyasi bo‘lsa, u holda tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} + ky = F(t). \tag{6}$$

(6) ga *majburiy tebranishlar tenglamasi* deyiladi.

(6) tenglamaning ikkala qismini m ga bo‘lib va

$$\frac{\lambda}{m} = \delta, \qquad \frac{k}{m} = \omega_0^2, \qquad \frac{F(t)}{m} = f(t)$$

belgilashlar kiritib, majburiy tebranishlar tenglamasining quyidagi uzil-kesil shaklini hosil qilamiz:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \delta\frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = f(t); \tag{7}$$

$$y'' + \delta y' + \omega_0^2 y = f(t). \tag{8}$$

(8) tenglama $y(0) = y_0$; $y'(0) = V_0$ boshlang'ich sharti bilan Koshi masalasi hisoblanadi.

Ikkala holda ham (3) va (7) tenglamalar

$$y'' + ay' + by = f(t) \tag{9}$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu esa o'zgarmas koeffitsiyentli ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama. Fizika kursida tebranishlar nazariyasida a va b koeffitsiyentlarni $a = \delta$ va $b = \omega_0^2$ ko'rinishda belgilash qabul qilingan. Shu sababli, biz ham (9) tenglamani

$$y'' + \delta y' + \omega_0^2 y = f(t) \tag{10}$$

ko'rinishida yozamiz.

Bu yerda: $y(t)$ — izlangan funksiya bo'lib, tebranma harakatni ifodalaydi va uning fizik ma'nosi turlicha bo'lishi mumkin (tebranma harakat qayerdaligiga qarab), δ — tebranishning so'nish koeffitsiyenti; ω_0 — erkin yoki xususiy tebranish chastotasi; $f(t)$ — majburlovchi kuch;

(10) tenglamaning o'ng tomoni kvaziko'phad ko'rinishida bo'lsin.

Qo'zg'atuvchi tashqi kuch davriy bo'lib $f(t) = F_0 \sin \omega t$ qonun bo'yicha o'zgaradigan, amaliy jihatdan muhim bo'lgan holni qaraymiz:

$$y'' + \partial y' + \omega_0^2 y = F_0 \sin \omega t. \tag{11}$$

Umumiy yechimni topamiz. Buning uchun dastlab bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topamiz. Xarakteristik tenglamasi:

$$k^2 + \delta k + \omega_0^2 = 0; \qquad k_{1,2} = \frac{-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4\omega_2^2}}{2}.$$

Umumiy yechimi: $y_0 = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}$.

Endi bir jinslimas tenglamaning xususiy yechimini topamiz. Buning uchun o'ng tomonni $f(t) = F_0 \sin \omega t = \left(\frac{F_0}{2i}\right) e^{i\omega t} - \left(\frac{F_0}{2i}\right) e^{-i\omega t}$ ko'rinishda ifodalaymiz.

$y'(t)$ xususiy yechimni quyidagicha izlaymiz:

$$y'(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t) = A_0 e^{i\omega t} + B_0 e^{-i\omega t};$$

$y'(t)$ va $y''(t)$ larni topib, (10) tenglamaga qo'yamiz.

$$y'(t) = i\omega A_0 e^{i\omega t} - i\omega B_0 e^{-i\omega t}; \quad y''(t) = i^2 \omega^2 A_0 e^{i\omega t} + i^2 \omega^2 B_0 e^{-i\omega t};$$

$$(-\omega^2 + i\delta\omega + \omega_0^2) A_0 e^{i\omega t} + (-\omega^2 - i\delta\omega + \omega_0^2) B_0 e^{-i\omega t} = \left(\frac{F_0}{2i}\right) e^{i\omega t} - \left(\frac{F_0}{2i}\right) e^{-i\omega t}.$$

Tenglamaning chap va o‘ng tomonidagi bir xil funksiyalar oldidagi koeffitsiyentlarni tenglashtirib A_0 va B_0 larni topamiz:

$$A = \frac{F_0}{2}\left[\frac{i(\omega^2-\omega_0^2)-\omega\delta}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+(\omega\delta)^2}\right]; \qquad B_0 = \frac{F_0}{2}\left[\frac{-i(\omega^2-\omega_0^2)-\omega\delta}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+(\omega\delta)^2}\right].$$

$y'(t)$ xususiy yechim quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$y'(t) = \frac{F_0}{2}\left[\frac{i(\omega^2-\omega_0^2)-\omega\delta}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+(\omega\delta)^2}\right]e^{i\omega t} - \frac{F_0}{2}\left[\frac{-i(\omega^2-\omega_0^2)-\omega\delta}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+(\omega\delta)^2}\right]e^{-i\omega t}.$$

Eyler formulasidan kelib chiquvchi $e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}=2\cos\omega t$; $e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}=2i\sin\omega t$ munosabatlardan foydalansak, umumiy yechim quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$y(t) = C_1e^{k_1t}+C_2e^{k_2t}-\left[\frac{\omega^2-\omega_0^2}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+(\omega\delta)^2}\right]F_0\sin\omega t -$$

$$-\left[\frac{\omega\delta}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+(\omega\delta)^2}\right]F_0\cos\omega t.$$

Agar yuqoridagi ifodalarda C_1 va C_2 lar qiymatlarini boshlang‘ich shartlardan foydalanib topsak, Koshi masalasi yechilgan hisoblanadi.

11.3.2. GARMONIK DAVRIY BO‘LMAGAN SO‘NUVCHI ERKIN TEBRANISHLAR

Bizga oldingi mavzudan ma’lumki, bir jinsli tenglamaning yechimi erkin tebranishni ifodalaydi:

$$y_0 = e^{-\frac{\delta}{2}t}\left[C_1e^{\sqrt{\left(-\frac{\delta}{2}\right)^2-\omega_0^2}\,t}+C_2e^{-\sqrt{\left(-\frac{\delta}{2}\right)^2-\omega_0^2}\,t}\right]. \qquad (1)$$

C_1, C_2 o‘zgarmaslar boshlang‘ich shartlardan topiladi. Ammo bu o‘zgarmaslar erkin tebranishlar xarakteriga ta’sir qilmaydi. Erkin tebranishlarni qaraymiz.

$\delta > 0$ bo‘lganda, erkin tebranish so‘nuvchi bo‘ladi, chunki (1) formuladan:

$$\lim_{t\to\infty} y_0 = 0.$$

$\delta = 0$ bo‘lganda erkin tebranish chastotali davriymas garmonik tebranishlarni ifodalaydi, shuning uchun ω_0 ga *erkin tebranish chastotasi* deyiladi.

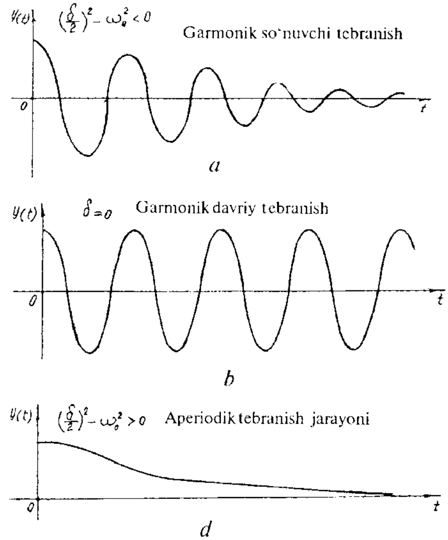
$$y_0 = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{i\omega_0 t} = (C_1 + C_2)\cos\omega_0 t +$$
$$+(iC_1 - iC_2)\sin\omega_0 t = C_3 \cos\omega_0 t + C_4 \sin\omega_0 t\,.$$

Agar $\delta > 0$ bo‘lib, kattaligi jihatidan kichik miqdor bo‘lsa, ya’ni $\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - \omega_0^2 < 0$ bo‘lsa, u holda erkin tebranish davriymas bo‘ladi. U tebranishni davriy garmonik funksiya bilan so‘nuvchi eksponent $e^{-\frac{\delta t}{2}}$ ko‘paytmasi shaklida ifodalaydi:

$$y_0 = (C_3 \cos\omega_1 t + C_4 \sin\omega_1 t)e^{-\frac{\delta t}{2}},$$

bu yerda $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\delta}{2}\right)^2}$ chastota bo‘lib, so‘nish koeffitsiyenti δ ga bog‘liq.

$\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - \omega_0^2 > 0$ bo‘lganda, ya’ni δ so‘nish koeffitsiyentining yetarlicha katta qiymatlarida erkin tebranish aperiodik harakatni ifodalaydi. Bu harakatning umumiy xarakteri shundaki, t vaqt o‘tishi bilan u asimptotik ravishda nolga yaqinlashadi. Bu holda eksponent $e^{\pm\sqrt{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - \omega_0^2}}$ monoton funksiya hisoblanadi. Yuqoridagi 3 ta tebranma harakatga mos funksiya grafiklarini keltiramiz. (152-*a*, *b*, *d* chizmalar.)



152-chizma.

11.3.3. MAJBURIY TEBRANISHLAR. AMPLITUDA-CHASTOTA XARAKTERISTIKA. REZONANS

Bir jinslimas tenglama yechimining o'ng tomonida turgan yig'indining birinchi hadi (bir jinsli tenglamaning yechimi) so'nuvchi tebranishlarni bildiradi. t o'sib borganda x kamayib boradi va demak, ma'lum vaqt o'tgandan keyin majburiy tebranishlarni aniqlovchi ikkinchi had hal qiluvchi ahamiyatga ega bo'ladi:

$$y_1(t) = \left[\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega^2-\omega_0^2)^2-(\omega\delta)^2}\right]F_0\sin\omega t - \left[\frac{\omega\delta}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+(\omega\delta)^2}\right]F_0\cos\omega t, \quad (1)$$

bu yerda: F_0 — majburiy kuch amplitudasi. ω — uning chastotasi. ω_0 — erkin tebranish chastotasi. δ uncha katta bo'lmagan qiymatda (1) formulada ikkinchi qo'shiluvchi birinchi qo'shiluvchidan juda ham kichik bo'ladi:

$$y_1(t) \approx B\sin\omega t = \left[\frac{\omega\delta}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+(\omega\delta)^2}\right]F_0\sin\omega t. \quad (2)$$

(2) dan ko'rinadiki, majburiy tebranish ko'rinishi jihatdan majburlovchi kuch tebranishga o'xshash bo'lib, faqat undan B amplitudaga farq qiladi:

$$B = \left[\frac{\omega\delta}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+(\omega\delta)^2}\right]F_0. \quad (3)$$

Majburiy tebranish amplitudasi B majburlovchi kuch chastotasi ga bog'liq bo'ladi, shuning uchun (3) bog'lanishga tebranish jarayonining *amplituda-chastota xarakteristikasi* deyiladi.

(3) dan ko'rinadiki, δ kichik bo'lsa, majburiy tebranish chastotasi keskin oshadi:

$$\omega \to \omega_0.$$

Bu esa *rezonans* hodisasi deyiladi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Tebranishlarning differensial tenglamasiga olib keluvchi masalalarni tushuntirib bering.
2. Erkin va majburiy tebranishlar tenglamasini keltirib chiqaring.
3. Erkin tebranish chastotasi nima?
4. Rezonans hodisasini tushuntiring.

12-bob. BIR NECHA O'ZGARUVCHILI FUNKSIYA UCHUN INTEGRAL HISOBI ELEMENTLARI

12.1. IKKI KARRALI INTEGRAL

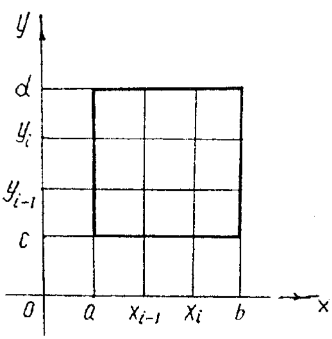
12.1.1. IKKI KARRALI INTEGRALGA OLIB KELADIGAN MASALALAR

1-masala. Biror D to'g'ri to'rtburchak shaklidagi yupqa plastinka berilgan bo'lsin. Bu plastinkaning ixtiyoriy ΔS yuzini qaraylik. Shu yuzga to'g'ri keladigan massa Δm bo'lsin. U holda $\frac{\Delta m}{\Delta S}$ nisbat ΔS yuzning *o'rtacha zichligi* deyiladi. Agar ΔS yuzcha kichraya borib, $P(x;\ y)$ nuqtaga aylanib qoladi, deb faraz qilib va $\lim\limits_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta S}$ limitni qarasak, bu limit mavjud bo'lsa, u P nuqtaning vaziyatiga, ya'ni bu nuqtaning x va y koordinatalariga bog'liq bo'ladi. Boshqacha aytganda, P nuqtaning qandaydir $f(P)$ funksiyasidan iborat bo'ladi. Bu limit plastinkaning P nuqtadagi *sirt zichligi* deyiladi:

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta S}=f(P)=\rho(x,\ y).$$

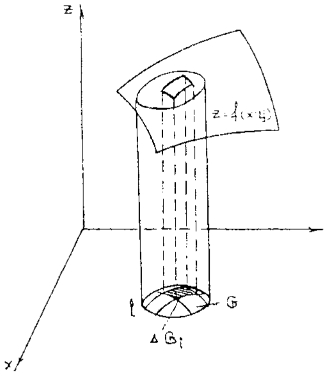
Endi D plastinkaning m massasini hisoblaylik. Agar plastinkaning ixtiyoriy ikkita teng yuzga ega bo'lgan kichik bo'laklari teng massaga ega bo'lsa, plastinka *bir jinsli* deyiladi. Agar plastinka bir jinsli bo'lsa, u holda uning massasi $m=\rho ab$ ga teng. Bu yerda ρ — sirt zichligi, a va b lar plastinkaning bo'yi va eni. Aytaylik, plastinka bir jinsli bo'lmasin. U holda plastinka massasini hisoblash uchun quyidagicha yondashamiz:

D plastinkani $x=x_i=\frac{ia}{n}$ va $y=y_j=\frac{jb}{n}$ $(i, j=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$ koordinata o'qlariga parallel to'g'ri chiziqlar yordamida n^2 to'g'ri to'rtburchaklarga bo'lamiz (153-chizma). Bu to'g'ri to'rtburchaklarni $D_{ij}(i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ bilan belgilaymiz, ularning har birining yuzi $\Delta x_i\cdot\Delta y_j$ ga teng.



153-chizma.

Bir o'zgaruvchili funksiya aniq integralida integral yig'indi tuzishga


154-chizma.

o'xshash, $\rho(x, y)$ funksiya uchun integral yig'indi tuzamiz:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\rho(\tau_i, t_j)\Delta x_i\Delta y_j, \qquad (1)$$

bu yerda $(\tau_i; t_j)$ – D_{ij} to'g'ri to'rtburchakning biror nuqtasi bo'lib, $\tau_i \in [x_{i-1}; x_i]$ va $t_j \in [y_{j-1}; y_j]$; (1) – D to'g'ri to'rtburchakning berilgan bo'linishiga mos $\rho(x, y)$ funksiya uchun *integral yig'indi* deyiladi.

(1)ning $n\to\infty$ dagi limiti plastinkaning m massasiga teng:

$$m = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\rho(\tau_i, t_j)\,\Delta x_i\Delta y_j. \qquad (2)$$

2-m a s a l a. xOy tekisligida l yopiq kontur bilan chegaralangan G soha berilgan bo'lsin. Pastdan G soha, yuqoridan $z=f(x, y)$ sirtning bo'lagi va yo'naltiruvchi l va yasovchilari Oz o'qqa parallel bo'lgan sirt bilan chegaralangan jismni qaraylik. Bunda $z=f(x, y)$ funksiya G sohada aniqlangan, uzluksiz va $f(x, y)\geq 0$ deb faraz qilaylik. Bunday jism *silindrik* jism deb ataladi. Shu silindrik jismning hajmini topish talab qilinsin (154-chizma). Buning uchun G sohani n ta kichik ΔG_1, ΔG_2, ..., ΔG_n yuzchalarga bo'lamiz va ularni yuzlarini ham ΔG_1, ΔG_2, ..., ΔG_n bilan belgilaymiz.

Har bir ΔG_i kichik yuzlarning ustida $z=f(x, y)$ sirtning ΔG_i yuzga proyeksiyalanuvchi bo'lagi bilan chegaralangan kichik silindrik sirt yasaymiz. Bu bilan silindrik jismni asoslari ΔG_i bo'lgan n ta ustunchalarga ajratamiz. Asosi ΔG_i bo'lgan ustun hajmini ΔV_i bilan belgilaymiz. U holda silindrik jismning V hajmi bu ustunchalar hajmlarining yig'indisiga teng:

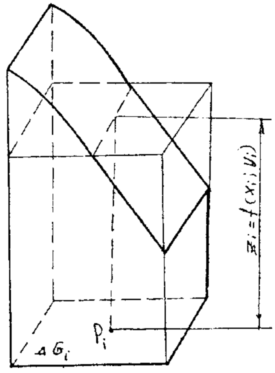
$$V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i.$$

Endi ΔG_i asosli silindrni qaraylik. Silindrning balandligi uchun $z=f(x, y)$ sirtning ΔG_i yuzining ixtiyoriy $P(x; y)$ nuqtasining z_i koordinatasini olamiz (155-chizma).

Bu silindrning hajmi taqriban ΔG_i asosning yuzi bilan $z_i=f(x, y)$ balandlikning ko'paytmasiga teng. Demak,

$$\Delta V_i = f(x_i, y_i)\Delta G_i.$$

Barcha bunday hajmlarning yig'indisini olsak, silindrik jism V hajmining taqribiy qiymatini beradi:



155-chizma.

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta G_i. \qquad (3)$$

(3) — silindrik jismning berilgan bo'linishlarga mos $f(x, y)$ funksiya uchun *integral yig'indisi* deyiladi. (3) integral yig'indining $n \to \infty$ dagi limiti silindrik jism hajmini beradi:

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,\ y_i)\Delta G_i.$$

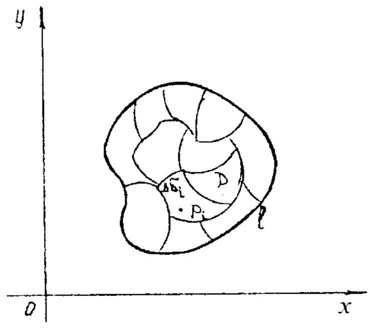
Shunday qilib, yuqoridagi ikki masalada ham, ya'ni plastinka massasini, silindr hajmini hisoblash masalalarida masala biror yig'indining limitini topishga keltirildi. Bu masalalar aniq integralning juda muhim umumlashmasiga, boshqacha aytganda, ikki karrali integralga olib keladi.

12.1.2. IKKI KARRALI INTEGRAL TA'RIFI VA UNI HISOBLASH

xOy tekisligida l chiziq bilan chegaralangan yopiq D sohani olaylik. D sohada aniqlangan uzluksiz $f(x, y)$ funksiyani qaraylik. D sohani ixtiyoriy chiziqlar yordamida n ta bo'lakka bo'lamiz, bo'lakchalarning o'zlarini va yuzlarini $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, ..., $\Delta\sigma_n$ bilan belgilaymiz. Bu bo'lakchalar yuzlarining yig'indisi butun sohaning yuziga teng bo'lsin:

$$D = \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i.$$

Bo'laklarning har birida ixtiyoriy P_i nuqta olamiz (156-chizma). $z = f(P) = f(x, y)$ funksiyaning bu nuqtalardagi qiymatlarini, ya'ni $f(P_1), f(P_2), ..., f(P_n)$ larini hisoblaymiz. $f(P_i)\Delta\sigma_i = f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$ ko'rinishdagi ko'paytmalarning yig'indisini tuzamiz:



156-chizma.

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_x,\ y_i)\Delta\sigma_i. \qquad (1)$$

(1) yig'indi ikki o'zgaruvchili $z = f(P) = f(x, y)$ funksiya uchun tuzilgan *integral yig'indi* deyiladi.

Endi $n \to \infty$ da $\Delta\sigma_n \to 0$ deb (1) integral yig'indining limitini topamiz.

Ta'rif. Agar (1) integral yig'indining $n \to \infty$ da limiti mavjud bo'lib, u $P_i(x_i;\ y_i)$ nuqtaning tanlanishiga, D sohaning $\Delta\sigma_i$ kichik yuzchalarga bo'linish usuliga bog'liq bo'lmasa, u holda bu limit $f(x, y)$ funksiyadan D soha bo'yicha olingan ikki karrali integral deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\iint_D f(P)d\sigma \ \text{ yoki } \ \iint_D f(x,\ y)d\sigma.$$

Shunday qilib,

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,\ y_i)\Delta\sigma_i$$

yoki

$$\iint_D f(P)d\sigma = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta\sigma_i,$$

bu yerda: D soha *integrallash sohasi*, $f(x, y)$ funksiya *integral ostidagi funksiya*, $f(x, y)d\sigma$ — *integral ostidagi ifoda*, $d\sigma$ — *yuz elementi* deyiladi.

Endi yuqoridagi massa va hajm haqidagi masalalarga kelsak, quyidagilarni aytish mumkin:

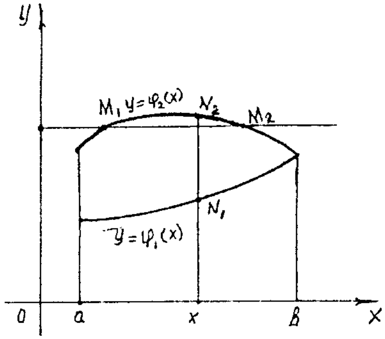
Zichligi $\rho = \rho(x,\ y)$ bo'lgan D yassi plastinkaning massasi zichlikdan olingan ikki karrali integralga teng:

$$m = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \rho(\tau_i,\ t_i)\Delta x_i \Delta y_i = \iint_D \rho(x,\ y)dxdy.$$

Silindrik jismning hajmi son jihatidan $f(x,\ y) \geq 0$ dan G soha bo'yicha olingan ikki karrali integralga teng:

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta G_i = \iint_G f(x,\ y)dG.$$

Buning o'zi esa ikki karrali integralning geometrik ma'nosini beradi.



157-chizma.

Endi ikki karrali integralni hisoblash uchun xOy tekislikda yotuvchi D sohani koordinata o'qlaridan biriga, masalan, Oy o'qqa parallel bo'lgan va sohaning ichki nuqtasidan o'tadigan har qanday to'g'ri chiziq soha chegarasini ikki M_1 va M_2 nuqtada kesib o'tadigan qilib olamiz. Qaralayotgan holda D soha $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $x = a$, $x = b$ chiziqlar bilan chegaralangan, bunda $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$, $a < b$ bo'lib, $\varphi_1(x)$ va $\varphi_2(x)$ funksiyalar $[a; b]$ kesmada uzluksiz deb faraz qilamiz (157-chizma).

Bunda sohani Oy o'q yo'nalishida *to'g'ri bo'lgan soha* deb ataymiz. Ox o'q yo'nalishida to'g'ri bo'lgan soha ham shunday aniqlanadi. Ikkala, ya'ni Ox va Oy o'qlar yo'nalishida to'g'ri bo'lgan sohani qisqacha *to'g'ri soha* deymiz. $f(x, y)$ funksiya D sohada uzluksiz bo'lsin. U holda

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy \right) dx \tag{2}$$

bo'ladi.

(2) formula ikki karrali integralni hisoblash formulasidir. (2) ni hisoblash uchun x ni o'zgarmas deb qaraymiz, qavs ichidagi ifodani avval y bo'yicha integrallaymiz. Integrallash natijasida x ning uzluksiz funksiyasi hosil bo'ladi:

$$\Phi(x) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy.$$

Bu funksiyani x bo'yicha a va b gacha integrallaymiz: $I = \int\limits_a^b \Phi(x)dx$, natijada biror o'zgarmas son chiqadi.

M i s o l. Ushbu ikki karrali integralni hisoblang:

$$I_0 = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{x^2} \left(x^2 + y^2\right) dy \right) dx.$$

Y e c h i s h. Avval ichki integralni hisoblaymiz:

$$\Phi(x) = \int_0^{x^2} (x^2 + y^2)dy = \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{x^2} = x^4 + \frac{x^6}{3};$$

endi tashqi integralni hisoblaymiz:

$$I_0 = \int_0^1 \left(x^4 + \frac{x^6}{3}\right)dx = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{21}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{21} = \frac{26}{105}.$$

D sohani aniqlaymiz. Bu holda D orqali $y = 0$, $y = x^2$, $x = 0$, $x = 1$ chiziqlar bilan chegaralangan soha ifodalangan.

12.1.3. IKKI KARRALI INTEGRALNING XOSSALARI

$z = f(x, y)$ funksiya D sohada berilgan va uzluksiz bo'lsin.

1-x o s s a. Agar $D = D_1 \cup D_2$ bo'lsa, u holda

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint_{D_2} f(x, y)dxdy$$

bo'ladi.

2-x o s s a. $\iint_D kf(x, y)dxdy = k\iint_{D_1} f(x, y)dxdy$ tenglik o'rinli. Bu yerda (k = const).

3-x o s s a. D sohada $f(x, y)$ funksiya bilan birga $\varphi(x, y)$ funksiya uzluksiz bo'lsa, tubandagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\iint_D [f(x, y) \pm \varphi(x, y)]dxdy = \iint_D f(x, y)dxdy \pm \iint_D \varphi(x, y)dxdy.$$

4-x o s s a. Agar D sohada $f(x, y) \geq 0$ bo'lsa, u holda

$$\iint_D f(x, y)dxdy \geq 0$$

bo'ladi.

5-x o s s a. Agar $f(x, y) \leq \varphi(x, y)$ bo'lsa, $\iint_D f(x, y)dxdy \leq$ $\leq \iint_D \varphi(x, y)dxdy$ bo'ladi.

6-x o s s a. D sohada shunday $(\xi; \eta)$ nuqta topiladiki, unda

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = f(\xi, \eta) \cdot S \quad \text{bo'ladi.}$$

bu yerda: $S - D$ sohaning yuzi.

12.1.4. IKKI KARRALI INTEGRALDA O'ZGARUVCHINI ALMASHTIRISH

Ba'zi bir hollarda ikki karrali integralni hisoblashni tezlashtirishda o'zgaruvchilarni almashtirish qulaylik tug'diradi. Aytaylik, xOy tekisligida chegaralangan D sohada uzluksiz $f(x, y)$ funksiyadan olingan ikki karrali integralni hisoblash talab qilinsin.

Faraz qilaylik,

$$x = \varphi(u, v) \text{ va } y = \psi(u, v) \tag{1}$$

funksiyalar xOy tekisligidagi $M(x; y) \in D$ nuqta bilan uOv tekislikning biror D' sohasidagi $M'(u; v)$ nuqtasi o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslikni o'rnatsin (158-chizma).

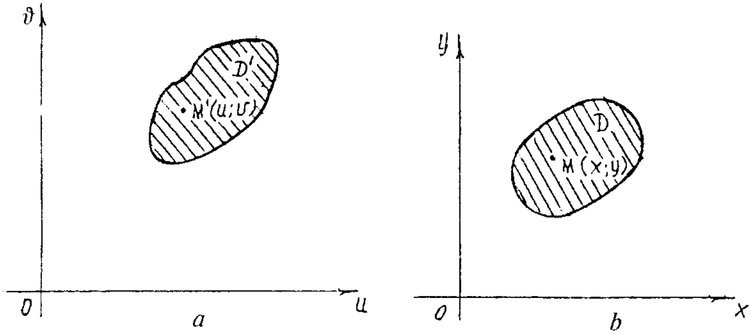
Demak, (1) formulalar tekislikning uOv sohasini xOy tekislikning D sohasiga almashtiradi:

$$u = \varphi_1(x, y) \text{ va } v = \psi_1(x, y). \tag{2}$$

(2) formulalar esa aksincha. Bu yerda u, v larni M nuqtaning *egri chiziqli koordinatalari* deb yuritiladi. Umuman olganda, (1) formulalar va undan kelib chiquvchi (2) formulalarga *koordinata almashtirish formulalari* deyiladi. U M nuqtaning to'g'ri burchakli x, y koordinatalaridan, uning u, v egri chiziqli koordinatalariga va aksincha o'tishga imkon beradi. Ikki karrali integralda o'zgaruvchini almashtirish formulasini isbotsiz keltiramiz:

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_D \varphi((u, v);\ \psi(u, v))\,|J|\,dudv, \tag{3}$$

bu yerda



158-chizma.

$$J(u,\ v)=\begin{vmatrix}\varphi'_u(u,\ v) & \psi'_u(u,\ v)\\ \varphi'_v(u,\ v) & \psi'_v(u,\ v)\end{vmatrix}$$

bo'lib, bunga (1) sistema uchun *Ostrogradskiy determinanti* deyiladi. Ikki karrali integralda o'zgaruvchilarni almashtirishda ko'p ishlatiladigan hol, bu to'g'ri burchakli x, y koordinatalarni bizga ma'lum bo'lgan $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ formulalarga ko'ra r va φ qutb koordinatalariga o'tishdir. Bu holda

$$J(r,\ \varphi)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r}\\ \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}=r.$$

$J(r,\varphi) = r$ ekanligini hisobga olsak, (3) formula quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_D f(r\cos\varphi;\ r\sin\varphi)rdrd\varphi\,. \tag{4}$$

Ikki karrali integralni hisoblash uchun D sohani bilishimiz kerak. D soha quyidagicha bo'lsin:

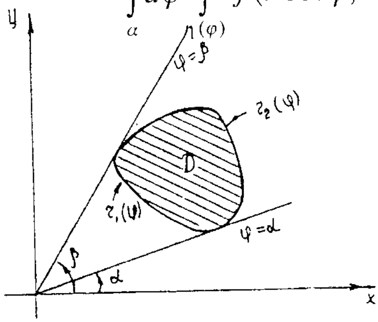
$$\alpha\le\varphi\le\beta;\quad r_1(\varphi)\le r\le r_2(\varphi),$$

bu yerda $r_1(\varphi)$, $r_2(\varphi)$ lar $[a;\ b]$ kesmada uzluksiz funksiyalar (159-chizma).

(3), (4) formulalar hamda ikki karrali integralni hisoblash formulasiga ko'ra quyidagi formulaga ega bo'lamiz:

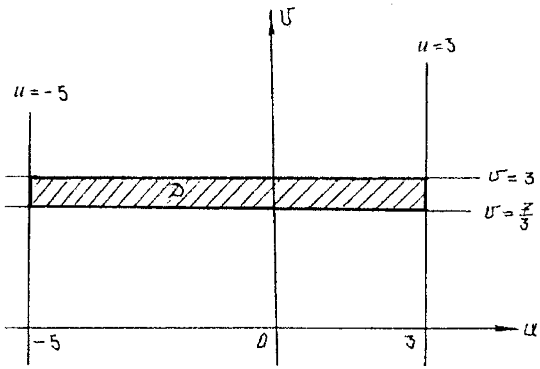
$$\iint\limits_D f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)rdrd\varphi=$$

$$=\int\limits_\alpha^\beta d\varphi\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)rdr. \tag{5}$$



159-chizma.

M i s o l. xOy tekislikda D soha bo'yicha olingan va $y = x + 3$, $y = x - 5$, $y=-\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$, $y=-\frac{2}{3}x+3$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan $\iint\limits_D f(y-x)\,dxdy$ ikki karrali integralni hisoblang.



160-chizma.

Y e c h i s h. Bu integralni to‘g‘ridan to‘g‘ri hisoblash bir muncha qiyinchilik tug‘diradi. Ammo o‘zgaruvchilarni oddiygina almashtirish sohani oddiy (to‘g‘ri to‘rtburchakli) ko‘rinishga keltiradi.

$u = y - x$, $v = y + \frac{2}{3}x$ (6) ko‘rinishda yangi o‘zgaruvchilarni kiritamiz. U holda $y = x + 3$ va $y = x - 5$ to‘g‘ri chiziqlar mos ravishda Ouv tekislikda $u = 3$; $u = -5$ to‘g‘ri chiziqlarga; $y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$, $y = -\frac{2}{3}x + 3$ to‘g‘ri chiziqlar esa $v = \frac{7}{3}$, $v = 3$ to‘g‘ri chiziqlarga o‘tadi (160-chizma).

Ostrogradskiy determinantini hisoblash uchun x va y larni u va v orqali ifodalaymiz, buning uchun (6) sistemani yechamiz:

$$x = -\frac{3}{5}u + \frac{3}{5}v; \quad y = \frac{3}{5}u + \frac{3}{5}v;$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{vmatrix} = -\frac{9}{25} - \frac{6}{25} = -\frac{15}{25} = -\frac{3}{5}.$$

Buning absolut qiymati: $|J| = \frac{3}{5}$.

Endi ikki karrali integralni hisoblaymiz:

$$\iint_D (y - x)\,dxdy = \int_D \left[\left(\frac{2}{5}u + \frac{3}{5}v\right) - \left(-\frac{2}{5}u + \frac{3}{5}v\right)\right]\frac{3}{5}\,dudv =$$

$$= \iint_D \frac{3}{5}\,ududv = \int_{\frac{7}{3}}^{3}\int_{-5}^{3} \frac{3}{5}\,ududv = \int_{\frac{7}{3}}^{3}\left(\int_{-5}^{3} \frac{3}{5}\,udu\right)dv = -3\frac{1}{5}.$$

12.1.5. IKKI KARRALI INTEGRALNING GEOMETRIYAGA TATBIQI

Ikki karrali integral yordamida hajmlarni va yuzlarni hisoblashni qaraymiz.

1. *Hajmlarni hisoblash.* Bizga ikki karrali integral ta'rifidan va ikki karrali integralga olib keluvchi masalalardan tubandagi ma'lum. Agar jism $z = f(x, y)$ sirt, $z = 0$ tekislik va yo'naltiruvchi D sohaning chegarasidan iborat bo'lgan to'g'ri chiziq, yasovchisi Oz o'qqa parallel silindrik sirt bilan chegaralangan bo'lsa, uning V hajmi D coha bo'yicha $f(x, y)$ funksiyadan olingan ikki karrali integralga teng ekanini ko'rgan edik:

$$V = \iint\limits_D f(x, y)\, dxdy.$$

M i s o l. $x = 0$, $y = 0$, $x + y + z = 2$, $z = 0$ sirtlar bilan chegaralangan jismning hajmini hisoblang (161-chizma).

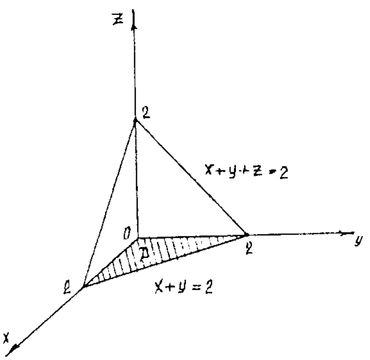
Y e c h i s h. Yuqoridagi formulaga ko'ra: $V = \iint\limits_D f(2 - x - y)\, dxdy.$

Bunda D soha chizmada shtrixlab qo'yilgan. U xOy tekisligida $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan uchburchak shaklidagi sohadir. Chegaralarni ikki karrali integralga qo'yib, hajmni hisoblaymiz:

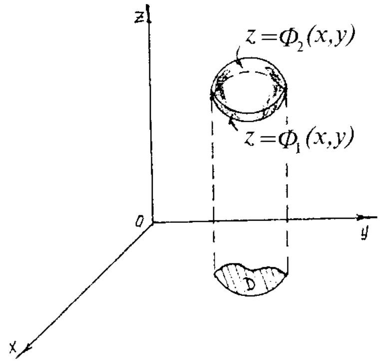
$$V = \int\limits_0^2 \int\limits_0^{2-x} (2 - x - y)\, dxdy = \int\limits_0^2 \left[(2 - x)y - \frac{y^2}{2} \right]_0^{2-x} dx = \int\limits_0^2 \frac{1}{2}(2 - x)^2 dx = \frac{4}{3};$$

demak, $V = \frac{4}{3}$ kub birlik.

Agar hajmi izlanayotgan jism yuqoridan $z = \Phi_2(x, y) \geq 0$ sirt, pastdan $z = \Phi_1(x, y) \geq 0$ sirt bilan chegaralangan va ikkala sirtning xOy tekisligidagi proyeksiyasi D sohadan iborat bo'lsa, u holda bu



161-chizma.



162-chizma.

jismning V hajmi ikkita silindrik jism hajmlarining ayirmasiga teng bo'ladi. Bu silindrik jismlardan birinchisining pastki asosi D sohadan, ustki asosi $z = \Phi_2(x, y)$ sirtdan iboratdir, shuningdek ikkinchi jismning pastki asosi D sohadan, ustki asosi $z = \Phi_2(x, y)$ sirtdan iborat (162-chizma).

Shuning uchun V hajm ikkita ikki karrali integrallar ayirmasiga teng:

$$V = \iint\limits_D \Phi_2(x,y)\,dxdy - \iint\limits_D \Phi_1(x,y)\,dxdy = \iint\limits_D [\Phi_2(x,y) - \Phi_1(x,y)]\,dxdy.$$

2. *Yuzlarni hisoblash.* D soha bo'yicha $f(x, y) = 1$ funksiya uchun integrallar yig'indisini tuzsak, u holda bu yig'indi bo'lish usuli har qanday bo'lganda ham shu sohaning S yuziga teng bo'ladi. $S = \sum\limits_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_i$ tenglikning o'ng tomonida limitga o'tib, quyidagi integralni hosil qilamiz:

$$S = \iint\limits_D dxdy.$$

Agar D soha to'g'ri bo'lsa, u holda $S = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \right] dx$ yoki $S = \int\limits_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]\,dx$ bo'ladi.

M i s o l. $y = 6 - x^2$ va $y = -x$ chiziqlar bilan chegaralangan soha yuzini hisoblang.

Y e c h i s h. Sohaning chegaralarini aniqlaymiz, buning uchun berilgan chiziq tenglamalarini sistema qilib yechamiz:

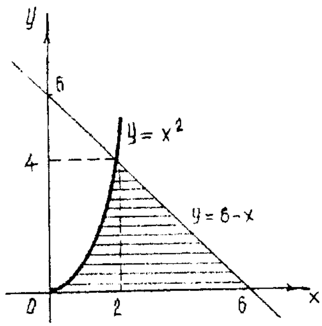
$$\begin{cases} y = 6 - x^2 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow 6 - x^2 = -x \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0,$$

bundan: $x_1 = 3$; $x_2 = -2$.

Demak, chiziqlar $M_1(3; -3)$, $M_2(-2; 2)$ nuqtalarda kesishadi. Endi yuzni hisoblaymiz:

$$S = \int\limits_{-2}^{3} \left(\int\limits_{-x}^{6-x^2} dy \right) dx = \int\limits_{-2}^{3} \left[(y) \Big|_{-x}^{6-x^2} \right] dx = \int\limits_{-2}^{3} (6 - x^2 + x)\,dx = 20\frac{5}{6} \text{ kv. birlik.}$$

12.1.6. IKKI KARRALI INTEGRALNING FIZIKAGA TATBIQI



163-chizma.

Ikki karrali integral yordamida plastinka massasi, plastinka statik momentlari, og'irlik markazining koordinatalari va inersiya momentlarini aniqlaymiz.

1. *Plastinka massasini hisoblash.* Biz ikki karrali integralga olib keluvchi birinchi masalada plastinka massasini hisoblashni qarab, tubandagi ko'rinishdagi integral yig'indiga ega bo'lgan edik:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\rho(\tau_i;\ t_j)\Delta x_i \Delta y_j, \tag{1}$$

bu yerda: $(\tau_i;\ \tau_j)$ – D_{ij} to'g'ri to'rtburchakning biror nuqtasi bo'lib, $\tau_i \in [x_{i-1};\ x_i]$, $t_j \in [y_{j-1};\ y_j]$.

(1) da $n \to \infty$ da limitga o'tsak, plastinka massasini hisoblash formulasiga ega bo'lamiz:

$$m = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\rho(\tau_i;\ t_j)\Delta x_i \Delta y_j$$

yoki

$$m = \iint_D \rho(x,\ y)\,dxdy. \tag{2}$$

M i s o l. Sirt zichligi $\rho(x,\ y) = xy^2$ bo'lgan, Ox o'qi, $y = x^2$ parabola va $x + y = 6$ to'g'ri chiziq bilan chegaralangan egri chiziqli uchburchakdan iborat D yupqa plastinkaning massasini hisoblang (163-chizma).

Y e c h i s h. Plastinkaning m massasini hisoblash uchun, dastlab D sohani aniqlaymiz: $D: \sqrt{y} \le x \le 6 - y;\ 4 \le y \le 9.$

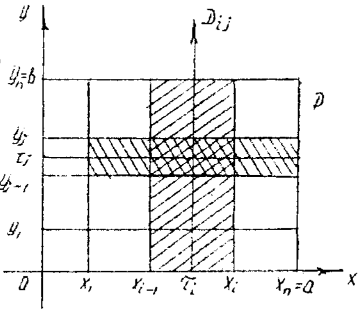
Endi (2) formuladan massasini hisoblaymiz:

$$m = \iint_D xy^2 dxdy = \int_4^9 dy \int_{\sqrt{y}}^{6-y} xy^2 dx = \int_4^9 \frac{x^2y^2}{2}\Bigg|_{x=\sqrt{y}}^{x=6-y} dy =$$

$$= \int_4^9 \left(\frac{(6-y)^2y^2}{2} - \frac{y^3}{2}\right)dy = \int_4^9 \left(18y^2 - \frac{13y^3}{2} + \frac{y^4}{2}\right)dy =$$

$$= \left(6y^3 - \frac{13}{8}y^4 + \frac{y^5}{10}\right)\Bigg|_4^9 = 453\frac{1}{8}.$$

2. *Plastinka statik momentlari va og'irlik markazining koordinatalarini hisoblash.* D to'g'ri burchakli plastinkaning koordinata o'qlariga nisbatan statik momentlarini hisoblaymiz. Buning uchun D plastinkani chizmada (164-chizma) ko'rsatilganidek, n^2 ta D_{ij} to'g'ri to'rtburchaklarga ajratamiz. Bu to'rtburchaklarni tomonlarining uzunliklari $(x_i - x_{i-1})$ va $(y_j - y_{j-1})$ ga teng. Har bir D_{ij} $(i, j = 1, 2, ..., n)$ to'rtburchakning massasi $(\tau_i;\ t_i)$ moddiy nuqtaga yig'ilgan deb hisoblaymiz.



164-chizma.

U holda fizika kursidan ma'lum bo'lgan n ta moddiy nuqtalar sistemasining koordinata o'qlariga nisbatan statik momentlari tubandagi formulalar orqali ifodalanadi:

$$M_x^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t_j \rho(\tau_i,\ t_j)\Delta x_i \Delta y_j. \tag{3}$$

$$M_y^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t_i \rho(\tau_i,\ t_j)\Delta x_i \Delta y_j. \tag{4}$$

(3) va (4) larda $n \to \infty$ da limitga o'tsak, ikki karrali integral ta'rifiga ko'ra D plastinkaning koordinata o'qlariga nisbatan statik momentlari uchun tubandagi formulalarga ega bo'lamiz:

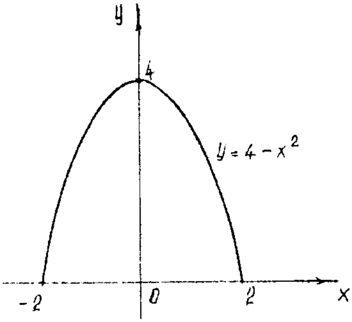
$$M_x = \iint_D y\rho(x,\ y)\,dxdy;\ \ M_y = \iint_D x\rho(x,\ y)\,dxdy. \tag{5}$$

Agar xOy koordinatalar sistemasida D plastinka og'irlik markazining koordinatalarini $(x_0;\ y_0)$ desak, mexanikadan quyidagi formulalar ma'lum:

$$M_x = my_0;\quad M_y = mx_0. \tag{*}$$

(*), (5) dan esa quyidagi formulalarga ega bo'lamiz:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{M_y}{m} = \frac{\iint\limits_D x\rho(x,\ y)dxdy}{\iint\limits_D \rho(x,\ y)dxdy} \\ y_0 &= \frac{M_x}{m} = \frac{\iint\limits_D y\rho(x,\ y)dxdy}{\iint\limits_D \rho(x,\ y)dxdy} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$



165-chizma.

Agar plastinka bir jinsli, ya'ni $\rho(x,\ y) = \text{const}$ bo'lsa, (6) formula quyidagi ko'rinishni oladi:

$$x_0 = \frac{\iint\limits_D x dx dy}{S} \quad \text{va} \quad y_0 = \frac{\iint\limits_D y dx dy}{S}, \qquad (7)$$

bu yerda: S — plastinka yuzi.

M i s o l. Sirt zichligi $\rho(x,\ y) = x + y$ ga teng bo'lgan $y = 4 - x^2$ parabola va Ox o'q bilan chegaralangan yuz og'irlik markazining koordinatalarini toping.

Y e c h i s h. D soha: $-2 \le x \le 2;\ 0 \le y \le 4 - x^2$ ekani o'z-o'zidan ravshan (165-chizma).

Shakl Oy o'qqa nisbatan simmetrik bo'lgani uchun $x_0 = 0$. Og'irlik markazining ordinatasini (6) formula bo'yicha hisoblaymiz. Buning uchun dastlab M_x statik momentni hisoblaymiz:

$$M_x = \iint\limits_D y\rho(x,\ y)dxdy = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{0}^{4-x^2} y(x+y)dy =$$

$$= \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{0}^{4-x^2} (yx + y^2)dy = \int\limits_{-2}^{2} \left[\frac{x(4-x^2)^2}{2} + \frac{(4-x^2)^3}{3}\right] dx =$$

$$= \frac{1}{6}\int\limits_{-2}^{2} (-2x^6 + 3x^5 + 24x^4 - 24x^3 - 96x^2 + 48x + 128)dx =$$

$$= \frac{1}{6}\left[-2\frac{x^7}{7} + 3\frac{x^6}{6} + 24\frac{x^5}{5} - 24\frac{x^4}{4} - 96\frac{x^3}{3} + 48\frac{x^2}{2} + 128x\right]\Bigg|_{-2}^{2} = 40\frac{34}{105}.$$

Og'irlik markazining ordinatasi:

$$y_0 = \frac{M_x}{m} = \frac{40\frac{34}{105}}{\iint \rho(x,\ y)dxdy} = \frac{40\frac{34}{105}}{17\frac{1}{15}} \approx 2,37.$$

12.2. UCH KARRALI INTEGRAL

12.2.1. UCH KARRALI INTEGRAL TA'RIFI

Dastlab D to'g'ri burchakli parallelepipedda aniqlangan $f(x,\ y,\ z)$ funksiya uchun uch karrali integral ta'rifini beramiz.

Aytaylik, D: $a_1 \le x \le b_1$, $a_2 \le y \le b_2$, $a_3 \le z \le b_3$ bo'lsin. $[a_1; b_1]$, $[a_2; b_2]$, $[a_3; b_3]$ kesmalarni

$$x_i = a_1 + \frac{b_1 - a_1}{n} i; \quad (i = 0, 1, 2, ..., n),$$

$$y_j = a_2 + \frac{b_2 - a_2}{n} j; \quad (j = 0, 1, 2, ..., n),$$

$$z_k = a_3 + \frac{b_3 - a_3}{n} k; \quad (k = 0, 1, 2, ..., n)$$

nuqtalar yordamida kesma uzunliklari bo'yicha n ta bo'lakka bo'lamiz. Ikki karrali integralga o'xshash tubandagi integral yig'indini tuzamiz:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f(\tau_i, t_j, \mu_k) \Delta x_i, \Delta y_j \Delta z_k, \tag{1}$$

bu yerda: $\tau_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $t_j \in [y_{j-1}, y_j]$, $\mu_k \in [z_{k-1}, z_k]$.

Agar (1) integral yig'indining $n \to \infty$ da limiti mavjud bo'lib, u nuqtalarning tanlanishiga bog'liq bo'lmasa, u holda bu limit D parallelepiped bo'yicha $f(x, y, z)$ funksiyadan olingan *uch karrali integral* deyiladi va tubandagicha belgilanadi:

$$\iiint_D f(x, y, z) dxdydz. \tag{2}$$

Uch karrali integral uchun ham ikki karrali integraldagidek, quyidagi formulalarning to'g'riligini ko'rsatish mumkin:

$$\iiint_D f(x, y, z) dxdydz = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz;$$

$$\iiint_D f(x, y, z) dxdydz = \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz;$$

$$\iiint_D f(x, y, z) dxdydz = \int_{a_3}^{b_3} dz \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_1}^{b_1} f(x, y, z) dx.$$

Misol. $D: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1$ parallelepiped bo'yicha $z = x^2 + xy + xyz$ funksiyaning uch karrali integralini hisoblang.

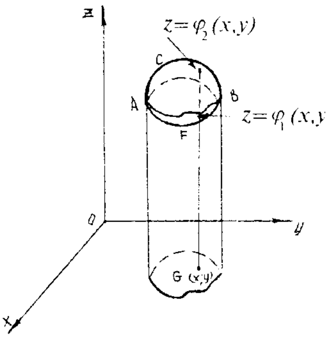
Yechish.

$$\iiint_D f(x, y, z) dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x^2 + xy + xyz) dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 \left(x^2 z + xyz + xy \frac{z^2}{2} \right) \Big|_{z=0}^{z=1} dy = \int_0^1 dx \int_0^1 \left(x^2 + xy + \frac{xy}{2} \right) dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 \left(x^2 + \frac{3}{2} xy \right) dy = \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{3}{2} \frac{xy^2}{2} \right) \Big|_{y=0}^{y=1} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{3}{4} x \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{3}{4} \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} + \frac{3}{8} = \frac{17}{24}.$$



166-chizma.

Endi yopiq, chegaralangan, to'g'ri sohada (silliq) uzluksiz bo'lgan $f(x, y, z)$ funksiya uchun uch karrali integral mavjudligini ko'rsatamiz.

Aytaylik, yopiq, chegaralangan ixtiyoriy shakldagi D sohada $f(x, y, z)$ funksiya integrallanuvchi bo'lsin (166-chizma). D sohaning xOy tekislikdagi proyeksiyasini G bilan belgilaymiz. Faraz qilaylik, Oz o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar D soha chegarasini ikkitadan ko'p bo'lmagan nuqtada kessin. U holda D sohani chegaralovchi sirtni ikki, ya'ni yuqori va pastki qismlarga ajratish mumkin (chizmada ACB va AFB qismlar).

Pastki qism sirti tenglamasi $z = \varphi_1(x, y)$, ustki qism sirti tenglamasi $z = \varphi_2(x, y)$ bo'lsin.

Agar ixtiyoriy $(x; y) \in G$ nuqta uchun $\int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)dz$ integral mavjud bo'lsa, u holda tubandagi munosabat o'rinli ekanligini isbotlash mumkin:

$$\iiint\limits_D f(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_G dxdy \int\limits_{\varphi_1(x,\ y)}^{\varphi_2(x,\ y)} f(x,\ y,\ z)dz.$$

Bunga o'xshash yana 2 ta formula yozish mumkin.

12.2.2. UCH KARRALI INTEGRALNING FIZIKA VA GEOMETRIYAGA TATBIQI

Ikki karrali integraldagidek, o'zgaruvchi hajm zichligi $\rho(x, y, z)$, $(x, y, z) \in D$ bo'lgan D jismning massasini hisoblash uchun quyidagi formulani yozish mumkin:

$$m = \iiint_D \rho(x, y, z)dxdydz. \tag{3}$$

M i s o l. Agar D: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$ kubning zichligi $\rho(x, y, z) = 1 + xyz$ ga teng bo'lsa, kubning massasini hisoblang.

Y e c h i s h. (3) formulaga asosan:

$$m = \iiint_D \rho(x, y, z)dxdydz = \iiint_D (1 + xyz)dxdydz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (1 + xyz)dz = \frac{9}{8}.$$

Ikki karrali integral yordamida jismning o'qqa nisbatan inersiya momentini hisoblash formulalariga o'xshash, uch karrali integral yordamida ham jismning o'qqa nisbatan inersiya momentlarini hisoblash formulalarini yozish mumkin. $\rho(x, y, z)$, $(x, y, z) \in D$ o'zgaruvchi zichlikka ega bo'lgan massasi uch o'lchovli yopiq chegaralangan D sohada yoyilgan jismning biror l o'qqa nisbatan inersiya momenti tubandagi formula bilan aniqlanadi:

$$J_l = \iiint_D r^2(x, y, z)\rho(x, y, z)dxdydz, \tag{4}$$

bu yerda: $r(x, y, z)$ — D jism $M(x, y, z)$ nuqtasidan l o'qqacha masofa. Agar l o'q Ox, Oy, Oz o'qlari bilan ustma-ust tushsa, o'qlarga nisbatan inersiya momentlari mos ravishda tubandagi formulalar bilan aniqlanadi:

$$J_x = \iiint_D (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dxdydz, \tag{5}$$

bu yerda: $y^2 + z^2 = r^2$;

$$J_y = \iiint_D (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dxdydz; \tag{6}$$

bu yerda: $x^2 + z^2 = r^2$.

$$J_z = \iiint_D (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, dxdydz, \tag{7}$$

bu yerda: $x^2 + y^2 = r^2$.

M i s o l. D: $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2$, $0 \le z \le 2$ bir jinsli kubning uning qirrasiga nisbatan inresiya momentini hisoblang.

Y e c h i s h. Misol shartiga ko'ra kub bir jinsli, ya'ni $\rho(x, y, z) = \text{const}$. Aniqlik uchun $\rho(x, y, z) = 1$ deb olaylik.

Kubning qirrasiga nisbatan inersiya momentini topish uchun $Oxyz$ koordinatalar sistemasining boshini kubning bir uchiga joylashtirsak, qirralar o'zaro ortogonal bo'lgani uchun, koordinata o'qlari qirralar bo'ylab joylashadi.

Bu holda (5), (6) va (7) formulalarning ixtiyoriy bittasidan foydalanish mumkin:

$$J_y = \iiint\limits_D (x^2 + z^2)\,dxdydz = \int_0^2 dx\int_0^2 dy\int_0^2 (x^2 + z^2)\,dz =$$

$$= \int_0^2 dx\int_0^2 \left[x^2 z + \frac{z^3}{3}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=2} dy = \int_0^2 dx\int_0^2 \left(2x^2 + \frac{8}{3}\right)dy = \int_0^2 \left[2x^2 y + \frac{8}{3}y\right]\Bigg|_{y=0}^{y=2}.$$

O'zgaruvchi zichlikka, ya'ni $\rho(x, y, z)$, $(x, y, z)\in D$ ega bo'lgan D jismning koordinata tekisliklariga nisbatan statik momentlarini topishda quyidagi formulalardan foydalanamiz:

$$\left.\begin{aligned} M_{xOy} &= \iiint\limits_D z\rho(x,\ y,\ z)\,dxdydz \\ M_{xOz} &= \iiint\limits_D y\rho(x,\ y,\ z)\,dxdydz \\ M_{yOz} &= \iiint\limits_D x\rho(x,\ y,\ z)\,dxdydz \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

D jismning og'irlik markazi koordinatalarini $Oxyz$ koordinatalar sistemasiga nisbatan $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ bilan belgilasak, og'irlik markazi koordinatalarini hisoblash uchun tubandagi formulalarga ega bo'lamiz:

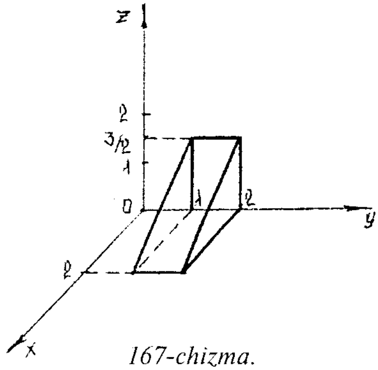
$$x_0 = \frac{M_{yOz}}{m},\quad y_0 = \frac{M_{xOz}}{m},\quad z_0 = \frac{M_{xOy}}{m};$$

(3) va (8) formulalardan foydalansak:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{\iiint\limits_D x\rho(x,\ y,\ z)dxdydz}{\iiint\limits_D \rho(x,\ y,\ z)dxdydz} \\ y_0 &= \frac{\iiint\limits_D y\rho(x,\ y,\ z)dxdydz}{\iiint\limits_D \rho(x,\ y,\ z)dxdydz} \\ z_0 &= \frac{\iiint\limits_D z\rho(x,\ y,\ z)dxdydz}{\iiint\limits_D \rho(x,\ y,\ z)dxdydz} \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

M i s o l. D: $0 \le x \le 2$, $1 \le y \le 2$, $0 \le z \le \frac{1}{2}(3-x)$ bir jinsli jismning og'irlik markazi koordinatalarini toping (167-chizma).

Y e c h i s h. Jism bir jinsli bo'lgani uchun $\rho(x, y, z) = \text{const}$. Hisoblash oson bo'lishi uchun $\rho(x, y, z) = 1$ deb olamiz. (3) formuladan jismning massasini topamiz:



167-chizma.

$$m = \iiint\limits_D dxdydz = \int_0^2 dx \int_1^2 dy \int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} dz = \int_0^2 dx \int_1^2 z \Big|_0^{\frac{1}{2}(3-x)} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 dx \int_1^2 (3-x)dy = \frac{1}{2}\int_0^2 (3-x)y \Big|_{y=1}^{y=2} dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (3-x)dx = \left(3x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 = 4.$$

(8) formuladan foydalanib, statik momentlarni hisoblaymiz:

$$M_{xOy} = \iiint\limits_D z\rho(x, y, z)dxdydz = \int_0^2 dx \int_1^2 dy \int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} zdz =$$

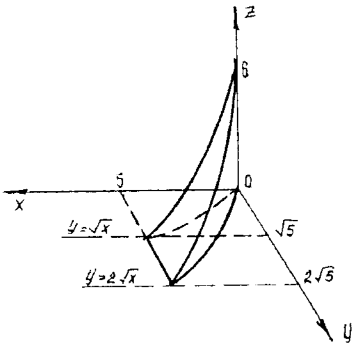
$$= \int_0^2 dx \int_1^2 \frac{z^2}{2} \Bigg|_{z=0}^{z=\frac{1}{2}(3-x)} dy = \int_0^2 \frac{(3-x)^2}{8} dx \int_1^2 dy = \frac{1}{4}\int_0^2 (3-x)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{(3-x)^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = 2\frac{1}{6};$$

$$M_{xOz} = \iiint\limits_D ydxdydz = \int_0^2 dx \int_1^2 ydy \int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} dz = \int_0^2 dx \int_1^2 y \cdot \frac{3-x}{2} dy =$$

$$= \int_0^2 \frac{(3-x)}{2} \frac{y^2}{2} \Bigg|_{y=1}^{y=2} dx = \frac{3}{4}\int_0^2 (3-x)dx = \frac{3}{4}\left(3x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 = 3;$$

$$M_{yOz} = \iiint\limits_D xdxdydz = \int_0^2 xdx \int_1^2 dy \int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} dz = \int_0^2 dx \int_1^2 \frac{3-x}{2} dy =$$



168-chizma.

$$= \int_0^2 x\cdot(3-x)dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = 3\frac{1}{3}.$$

Endi og'irlik markazining koordinatalarini (9) formulaga asosan topamiz:

$$x_0 = \frac{M_{yOz}}{m} = \frac{\frac{10}{3}}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6};$$

$$y_0 = \frac{M_{xOz}}{m} = \frac{3}{4};$$

$$z_0 = \frac{M_{xOy}}{m} = \frac{\frac{13}{6}}{4} = \frac{13}{24}.$$

Biz jism massasini $m = \iiint\limits_D \rho(x, y, z)dxdydz$ formula bo'yicha hisobladik. Agar jism zichligi $\rho(x, y, z) = 1$ bo'lsa, u holda D jism massasi son jihatidan jism hajmiga teng bo'ladi. Shuning uchun jism hajmi quyidagi uch karrali integral yordamida hisoblanadi:

$$V = \iiint\limits_D dxdydz. \tag{10}$$

M i s o l. D: $0 \le x \le 5$, $\sqrt{x} \le y \le 2\sqrt{x}$, $0 \le z \le 6 - x$ jismning hajmini hisoblang.

Y e c h i s h. Jism hajmini hisoblash uchun (10) formulani tatbiq etamiz (168-chizma):

$$V = \iiint\limits_D dxdydz = \int_0^5 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy \int_0^{6-x} dz =$$

$$= \int_0^5 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} z\Big|_{z=0}^{z=6-x} dy = \int_0^5 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (6-x)dy = \int_0^5 (6-x)y\Big|_{y=\sqrt{x}}^{y=2\sqrt{x}} dx =$$

$$= \text{(yechishni davom ettiring)}.$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Berilgan soha bo'yicha ikki o'zgaruvchili funksiyaning ikki karrali integrali deb nimaga aytiladi?
2. Ikki karrali integralning geometrik ma'nosi nimadan iborat?

3. Ikki karrali integral xossalarini sanab bering.
4. Ikki karrali integralni to'g'ri burchakli va qutb koordinatalar sistemasida hisoblash usullarini ko'rsating.
5. Berilgan soha bo'yicha uch o'zgaruvchili funksiyaning uch karrali integrali deb nimaga aytiladi?
6. Ikki karrali integral yordamida tekis figura og'irlik markazining koordinatalarini, statik va inersiya momentlarini hisoblash formulalarini yozing.
7. Uch karrali integral yordamida og'irlik markazining koordinatalari, statik va inersiya momentlarini, hajmni hisoblash formulalarini yozing.

12.3. VEKTORLAR ANALIZINING ASOSIY TUSHUNCHALARI. EGRI CHIZIQLI INTEGRALLAR

12.3.1. SKALYAR VA VEKTOR MAYDON

Bizga ma'lumki, fizika kursida ikki xil kattalik o'rganiladi: bulardan biri fazodagi yo'nalishga bog'liq ravishda, ikkinchisi esa faqat son qiymatiga ko'ra. Faqat tanlangan o'lchov birligiga mos bitta son qiymatiga ega kattalik *skalyar kattalik* deyiladi. Son qiymati va fazodagi yo'nalishi bilan xarakterlanadigan kattalik *vektor kattalik* deyiladi. Bu kattalikka misollar qilib, tezlik, tezlanish, kuch, fazoda yo'nalishga ega bo'lgan kesma va boshqalarni ko'rsatsa bo'ladi.

Bu ikkala kattalik fazodagi nuqtaning koordinatalari va vaqtning funksiyalari bo'lishi mumkin. U vaqtda ular mos ravishda skalyar va vektor maydonlari deyiladi.

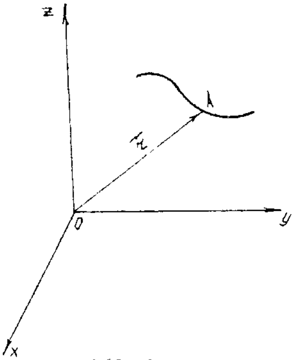
Skalyar argument vektor funksiyasi tushunchasiga kelishdan oldin fazoda egri chiziq tenglamasi bilan tanishib o'tamiz.

12.3.2. FAZODA EGRI CHIZIQ TENGLAMASI. SKALYAR ARGUMENT VEKTOR FUNKSIYASI

$\overrightarrow{OA} = \vec{r}$ vektorni qaraymiz: bu vektorning boshi koordinatalar boshida, oxiri esa biror $A(x;\ y;\ z)$ nuqtada bo'lsin. Bunday vektor radius-vektor deb ataladi. Bu vektorni uning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari orqali ifodalaymiz:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \qquad (1)$$

$\vec{r}$ vektorning proyeksiyalari biror t parametrning funksiyalari bo'lsin:



169-chizma.

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$\vec{r} = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k} \qquad (3)$$

yoki qisqacha

$$\vec{r} = \vec{r}(t); \qquad (4)$$

t o'zgarganda x, y, z ham o'zgaradi va vektorning oxiri A nuqta fazoda biror egri chiziq chizadi, bu egri chiziq $\vec{r} = \vec{r}(t)$ vektorning *godografi* deyiladi. (3) yoki (4) tenglamalar fazodagi chiziqning *vektorial tenglamalari* deyiladi. (2) tenglamalar fazodagi egri chiziqning *parametrik tenglamalari* deyiladi (169-chizma).

(3) va (4) tenglamalarda t o'zgarsa, $\vec{r}$ vektorning miqdori va yo'nalishi o'zgaradi. Shuning uchun $\vec{r}$ vektor skalyar argument t ning vektor funksiyasi deb ataladi.

12.3.3. SKALYAR ARGUMENT VEKTOR FUNKSIYASINING LIMITI VA HOSILASI

Skalyar argument vektor funksiyasi $\vec{r}$ berilgan bo'lsin, ya'ni

$$\vec{r} = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k} \quad \text{yoki} \quad \vec{r} = \vec{r}(t). \qquad (*)$$

Quyidagicha faraz qilamiz:

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = x_0, \qquad \lim_{t\to t_0} y(t) = y_0, \qquad \lim_{t\to t_0} z(t) = z_0,$$

u holda $\vec{r}_0 = x_0\,\vec{i} + y_0\,\vec{j} + z_0\,\vec{k}$ vektor $\vec{r} = \vec{r}(t)$ vektorning limiti deyiladi va bunday yoziladi: $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$.

Endi skalyar argument vektor funksiyasining, ya'ni

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k} \qquad (1)$$

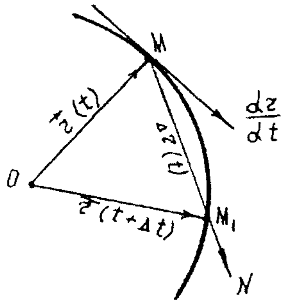
ning hosilasi haqidagi masalaga o'tamiz; $\vec{r}(t)$ vektorning boshi koordinatalar boshida deb faraz qilamiz. (1) tenglama biror fazoviy egri chiziqning tenglamasi ekanini bilamiz. t ning egri chiziqdagi M

nuqtaga mos keladigan qiymatni olib, unga Δt orttirma beramiz; u vaqtda mana bu vektorni hosil qilamiz:

$$\vec{r}(t+\Delta t) = x(t+\Delta t)\,\vec{i} +$$

$$+y(t+\Delta t)\,\vec{j} + z(t+\Delta t)\,\vec{k},$$

bu vektor egri chiziqda biror M_1 nuqtani aniqlaydi (170-chizma). Vektor orttirmasini topamiz:



170-chizma.

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = [x(t+\Delta t) - x(t)]\,\vec{i} +$$

$$+[y(t+\Delta t) - y(t)]\,\vec{j} + [z(t+\Delta t) - z(t)]\,\vec{k}.$$

170-chizmada $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t)$, $\overrightarrow{OM_1} = \vec{r}(t+\Delta t)$ va bu orttirma $\overrightarrow{MM_1} = \Delta\vec{r}(t)$ vektor bilan tasvirlanadi.

Vektor funksiya orttirmasining skalyar argument orttirmasiga nisbatini, ya'ni $\frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}$ nisbatni qaraymiz: bu $\Delta\vec{r}(t)$ vektorga kollinear vektor bo'ladi, chunki uning o'zi $\Delta\vec{r}(t)$ ni $\frac{1}{\Delta t}$ skalyarga ko'paytirishdan hosil bo'ladi. Bu vektorni ushbu ko'rinishda yozish mumkin:

$$\frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\,\vec{i} + \frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}\,\vec{j} + \frac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t}\,\vec{k}.$$

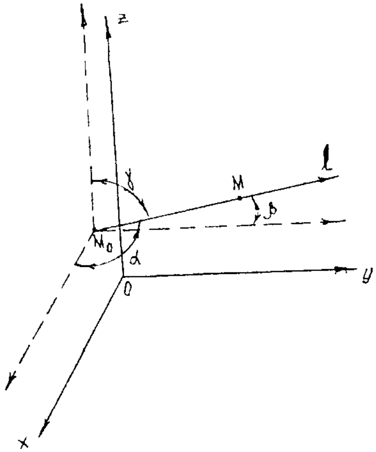
Oxirgi tenglik bilan belgilangan vektor $\vec{r}(t)$ vektorning skalyar argument t bo'yicha hosilasi deb ataladi. Hosila $\frac{d\vec{r}}{dt}$ yoki $\vec{r}'$ bilan belgilanadi.

Shunday qilib, $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}' = x'(t)\,\vec{i} + y'(t)\,\vec{j} + z'(t)\,\vec{k}\,\partial$ yoki

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\vec{i} + \frac{dy}{dt}\,\vec{j} + \frac{dz}{dt}\,\vec{k}.$$

12.3.4. BERILGAN YO'NALISH BO'YICHA HOSILA. GRADIYENT

Skalyar maydonlarni o'rganish maqsadida berilgan yo'nalish bo'yicha hosila va gradiyent tushunchalari kiritiladi. Bizga skalyar maydon $f(M)$ berilgan bo'lsin. Yo'nalishi ko'rsatilgan l to'g'ri chiziqda o'zgarmas M_0 va o'zgaruvchi M nuqtani olaylik. Yo'nalgan kesmaning M_0 dan M gacha kattaligini M_0M bilan belgilaylik (bunda M_0M ning yo'nalishi l



171-chizma.

ning yo'nalishi bilan bir xil bo'lsa, musbat, aks holda manfiy deb qabul qilamiz (171-chizma)). M nuqta M_0 ga cheksiz yaqinlasha borgandagi $\lim\limits_{M_0 \to M} \frac{f(M)-f(M_0)}{M_0M}$ limitni qaraymiz. Bu limit $f(M)$ funksiyaning M_0 nuqtadagi l yo'nalish bo'yicha hosilasi deyiladi va tubandagicha belgilanadi:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}. \tag{1}$$

Biror $Oxyz$ koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin va koordinatalar funksiyasi $f(M) = f(x, y, z)$ qaralayotgan sohada uzluksiz hosilalarga ega bo'lsin. U holda (1) limit mavjud va tubandagi tenglik o'rinli:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{dx}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma, \tag{2}$$

bu yerda xususiy hosilalarning barchasi $M(x;\ y;\ z)$ nuqtada hisoblangan, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ lar esa l o'qning yo'naltiruvchi kosinuslari. (2) formulaning to'g'riligini ko'rsatamiz.

Agar $M_0M = t$ deb olsak, u holda o'zgaruvchi M nuqtaning koordinatalari quyidagi ko'rinishda bo'ladi: $x = x_0 + t\cos\alpha$; $y = y_0 + t\cos\beta$, $z = z_0 + t\cos\gamma$. Yo'nalish bo'yicha hosila $\frac{\partial f}{\partial l}$ esa $f(x_0 + t\cos\alpha;\ y_0 + t\cos\beta;\ z_0 + \cos\gamma)$ funksiyadan l bo'yicha olingan hosilaning $t = 0$ dagi qiymatiga teng bo'ladi. Murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga ko'ra uning qiymati (2) ning o'ng tomoni bo'ladi.

Skalyar maydon $f(M)$ ning M nuqtadagi *gradiyenti* deb uning to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi o'qlaridagi proyeksiyalari $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ larga aytiladi va grad f deb belgilanadi:

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}. \tag{3}$$

grad f vektor bo'lib, uning moduli tubandagiga teng:

$$|\operatorname{grad} f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

M i s o l: $f(x,\ y,\ z) = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ funksiya gradiyentini toping.

Y e c h i s h. grad f ni hisoblash uchun $f(x,\ y,\ z)$ funksiyaning $x,\ y,\ z$ koordinatalar bo'yicha xususiy hosilalarini hisoblaymiz:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y-y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}};$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{z-z_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}.$$

Demak, grad $f=\frac{x-x_0}{f}\vec{i}+\frac{y-y_0}{f}\vec{j}+\frac{z-z_0}{f}\vec{k}$.

12.3.5. EGRI CHIZIQLI INTEGRALLAR

1. *Birinchi tur egri chiziqli integral*

Fizikaning ko'pgina masalalarini yechish aniq integralning umumlashmasi, ya'ni egri chiziqli integralga olib keladi. Masalan, Biror F kuch maydoniga joylashgan $AB(l)$ egri chiziq bo'ylab biror m massa harakatlansin (AB egri chiziqning uzunligini ham l bilan belgilaymiz). Shu m massaning l egri chiziqning A nuqtasidan B nuqtasiga ko'chganda bajargan ishini hisoblash talab qilinsin. Agar moddiy nuqta o'zgarmas $\vec{F}$ kuch ta'sirida A nuqtadan B nuqtaga biror vektor bilan ifodalangan to'g'ri chiziq bilan ko'chgan bo'lsa, bunda bajarilgan ish fizikadan ma'lum bo'lgan

$$A=\vec{F}\,\vec{S}$$

formula bilan topiladi.

Ammo haqiqatan olib qaraganda, $\vec{F}$ kuch kattaligi bo'yicha ham o'zgaradi, l egri chiziq bo'yicha A nuqtadan B nuqtaga ko'chish ham egri chiziq bo'ylab bo'ladi. Shu sababli, yuqoridagi formulani tatbiq qilib bo'lmaydi. Bu holda ishni hisoblash uchun tubandagi ishlarni bajaramiz. $\breve{AB}(l)$ egri chiziqda $z=f(x,y)$ funksiya berilgan bo'lsin (bunda $(x,y)\in l$). l egri chiziqning A nuqtadan B nuqtagacha bo'lgan AB yoyini $A=A_0,\ A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_{n-1},\ A_n=B$ nuqtalar yordamida n ta bo'lakka bo'lamiz. Har bir bo'lakchada ixtiyoriy $(\xi_i;\ \eta_i)(\xi_i;\ \eta_i\in A_iA_{i+1})$ nuqta olamiz. Bu nuqtada funksiya qiymati $f(\xi_i;\ \eta_i)$ ni hisoblab, uni mos A_iA_{i-1} bo'lakchaning uzunligi Δl_i ga ko'paytiramiz. Aniq integralga olib keluvchi masala mavzusidagiga o'xshash, tubandagi integral yig'indini tuzamiz:

$$A^* = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i,\ \eta_i)\,\Delta l_i. \qquad (*)$$

(*) — *integral yig'indi* deyiladi. Bu yig'indining limiti aniq integral mavzusida keltirilgan yig'indilarning limiti kabi ta'riflanadi. Δl_i bo'laklarning eng kattasi uzunligini σ bilan belgilaylik, ya'ni $\sigma = \max \Delta l_i$.

1-ta'rif. Agar $\sigma = \max \Delta l_i \to 0$ da A^* yig'indi chekli limitga ega bo'lsa, u holda $z = f(x,\ y)$ funksiya l egri chiziq bo'yicha integrallanuvchi deyilib, bu limit esa $z = f(x,\ y)$ *funksiyaning l egri chiziq bo'yicha birinchi tur egri chiziqli integral* deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\int_l f(x,\ y)dl.$$

Demak,

$$\int_l f(x,\ y)dl = \lim_{\sigma\to 0} A^* = \lim_{\sigma\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta l_i. \qquad (1)$$

Birinchi tur egri chiziqli integralni hisoblash aniq integralni hisoblashga keltiriladi.

Endi l egri chiziq tenglamalarining berilishiga ko'ra egri chiziqli integralni hisoblash formulalarini keltiramiz.

a) l yassi egri chiziq $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ parametrik ko'rinishdagi tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, boshqacha aytganda, egri chiziq koordinatalari t parametr funksiyasi shaklida berilsa, u holda yoy differensiali uchun $\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ ga ega bo'lamiz.

Bu ifodani Δt ga bo'lib, $\Delta t \to 0$ da limitini topsak, yoy differensiali uchun quyidagi ifodaga ega bo'lamiz: $dl = \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$.

Bundan esa (1) formula quyidagicha ifodalanib, egri chiziqli integralni hisoblash formulasi kelib chiqadi:

$$\int_l f(x,\ y)\,dl = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt; \qquad (2)$$

agar l egri chiziq fazoda parametrik ko'rinishdagi tenglama bilan berilgan bo'lsa, ya'ni $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ bo'lsa, u holda (2) formula quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\int_l f(x,y,z)dl = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt; \qquad (3)$$

b) l yassi egri chiziq $y = y(x)$ $(\alpha \le x \le \beta)$ tenglama bilan berilgan bo'lsa, (2) formula quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\int_l f(x,y)dl = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1 + y'^2}\,dx. \qquad (4)$$

l yassi egri chiziq $x = x(y)$ $(c \le y \le d)$ tenglama bilan berilgan bo'lsa, egri chiziqli integral tubandagi formula bilan hisoblanadi:

$$\int_l f(x,y)dl = \int_a^b f(x,(y),y)\sqrt{x'^2 + 1}\,dy. \qquad (5)$$

1-misol. $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ parametrik tenglamalari bilan berilgan aylana bo'yicha $\int_l (x^2 + y^2)\,dl$ egri chiziqli integralni hisoblang $(0 \le t \le 2\pi)$.

Yechish. (2) formulaga asosan hisoblaymiz:

$$\int_l f(x,y)dl = \int_0^{2\pi} (a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t)\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}\,dt = 2\pi a^3.$$

2-misol. $\int_l (2xy + y^2 + z^2)dl$ egri chiziqli integralni hisoblang, bu yerda $l: x = \cos t; y = \sin t; z = 2t;\ \ 0 \le t \le 2\pi$ vint chizig'ining bir o'rami.

Yechish. (3) formulaga asosan hisoblaymiz:

$$\int_l (2xy + y^2 + z^2)\,dl = \int_0^{2\pi} (2\cos t\sin t + \sin^2 t + 4t^2)\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 4dt} =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\sin 2t + \sin^2 t + 4t^2\right)\sqrt{5}dt = \sqrt{5}\int_0^{2\pi}(\sin 2t + \sin^2 t + 4t^2)dt =$$

$$= \sqrt{5}\left(-\frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cos 2t + \frac{4}{3}t^3\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \sqrt{5}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\cos 2t + \frac{4}{3}t^3\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= \sqrt{5}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{4}{3}8\pi^3\right) - \sqrt{5}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) = \frac{32\sqrt{5}}{3}\pi^3;$$

2. *Ikkinchi tur egri chiziqli integral*

$\breve{AB}$ egri chiziq tekislikda berilgan bo'lib, egri chiziqda $z = f(x, y)$ funksiya aniqlangan bo'lsin. Bu egri chiziqni oldingi mavzudagidek n ta bo'lakka bo'lamiz. Har bir $\breve{A_i A_{i+1}}(i = \overline{1,n})$ bo'lakchada ixtiyoriy $(\xi_i, \eta_i)((\xi_i, \eta_i) \in (\breve{A_i A_{i+1}}))$ nuqta tanlaymiz. Funksiyaning bu nuqtadagi qiymati $f(\xi_i, \eta_i)$ ni aniqlaymiz. Shu funksiya $\breve{A_i A_{i+1}}$ yoyining Ox o'qdagi proyeksiyasini Δx_i, Oy o'qidagi proyeksiyasini Δy_i bilan belgilaymiz. Quyidagi yig'indini tuzamiz:

$$c_1 = \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i, \quad c_2 = \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i. \tag{6}$$

(6) ga integral yig'indilar deyiladi. Bo'laklar uzunliklarining eng kattasini mos ravishda $\sigma_1 = \max|\Delta x_i|$, $\sigma_2 = \max|\Delta y_i|$ bilan belgilaymiz.

2-ta'rif. Agar $\sigma_1 = \max|\Delta x_i| \to 0$ da c_1 va $\sigma_2 = \max|\Delta y_i| \to 0$ da c_2 yig'indilarning chekli limiti mavjud bo'lsa, u holda $f(x, y)$ uzluksiz egri chiziq bo'yicha integrallanuvchi limitlar $f(x, y)$ *funksiyaning ikkinchi tur* $\breve{AB}$ *egri chiziqli integrallari* deyiladi. Ular quyidagicha belgilanadi:

$$\int_{\breve{AB}} f(x, y)dx, \quad \int_{\breve{AB}} f(x, y)dy.$$

Demak,

$$\int_{\breve{AB}} f(x, y)dx = \lim_{\sigma_1 \to 0} c_1 = \lim_{\sigma_1 \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i,$$

$$\int_{\breve{AB}} f(x, y)dy = \lim_{\sigma_2 \to 0} c_2 = \lim_{\sigma_2 \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i.$$

Ikkinchi tur egri chiziqli integralning umumiy ko'rinishi deb quyidagi yig'indiga aytiladi:

$$\int_{\breve{AB}} f(x, y)dx + g(x, y)dy, \tag{7}$$

$$\int_{\breve{AB}} f(x, y)dx + g(x, y)dy = \int_{\breve{AB}} f(x, y)dx + \int_{\breve{AB}} g(x, y)dy.$$

Ikkinchi tur egri chiziqli integral integrallash yo'lining yo'nalishiga bog'liq. Shuning uchun:

$$\int_{\breve{AB}} f(x, y)\,dx + g(x, y)\,dy = -\int_{\breve{BA}} f(x, y)\,dx + g(x, y)\,dy.$$

Agar integrallash yo'li yopiq chiziqdan iborat bo'lsa, u holda yopiq kontur bo'yicha olingan egri chiziqli integral, aylanib o'tish yo'nalishi ko'rsatilib, quyidagicha belgilanadi:

$$\oint f(x,\ y)\,dx + g(x,\ y)\,dy. \tag{8}$$

Agar yo'nalish soat mili harakatiga qarama-qarshi bo'lsa musbat, aks hol manfiy deb olinadi.

Ikkinchi tur egri chiziqli integral ham hisoblashda aniq integralni hisoblashga olib kelinadi.

Endi egri chiziqli integralni egri chiziq tenglamalarining berilishiga ko'ra hisoblash formulalarini ko'rib o'tamiz.

a) agar $\overset{\smile}{AB}$ egri chiziq $x = x(t)$, $y = y(t)$ parametrik tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, u holda (7) formula quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y)dx + g(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{t_A}^{t_B} [f(x(t),y(t))x'(t) + g(x(t),y(t))y'(t)]\,dt, \tag{9}$$

bu yerda: t_A, t_B — parametr t ning yo'lning boshlanishi A ga mos qiymatidan yo'l oxiri B ga mos qiymatgacha o'zgarishi.

$\overset{\smile}{AB}$ egri chiziq fazoda $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ parametrik tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, (7) formula tubandagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y,z)dx + g(x,y,z)dy + k(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_{t_A}^{t_B} [f(x(t),y(t),z(t)x'(t) + g(x(t),y(t),z(t))y'(t) +$$

$$+ k(x(t),y(t),z(t))z'(t)]dt. \tag{10}$$

b) Agar tekis $\overset{\smile}{AB}$ egri chiziq $y = y(x)$ tenglama bilan berilgan bo'lib, x o'zgaruvchi a dan b gacha o'zgarsa, shuningdek, tekis egri chiziq $x = x(y)$ tenglama bilan berilgan bo'lib, y o'zgaruvchi c dan d ga o'zgarsa, egri chiziqli integral tubandagi formulalar bilan hisoblanadi:

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y)dx + g(x,y)dy = \int\limits_a^b [f(x,y(x)) + g(x,y(x))y'(x)]dx; \tag{11}$$

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f(x,y)dx + g(x,y)dy = \int\limits_c^d [f(x(y),y) + g(x(y),y)x'(y)]dx. \tag{12}$$

1-misol. $\int\limits_{l}(x^2-2xy)dx+(2xy+y^2)dy$ integralni hisoblang, bu yerda l kontur $y=x^2$ parabolaning $A(1;\ 1)$ nuqtadan $B(2;\ 4)$ nuqtagacha yoyi.

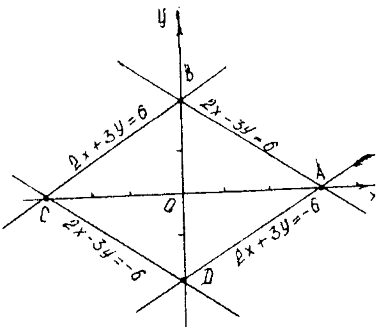
Yechish. (11) formuladan foydalanamiz, bu yerda x o'zgaruvchi 1 dan 2 gacha o'zgaradi.

$$\int\limits_{l}(x^2-2xy)dx+(2xy+y^2)dy=$$

$$=\int\limits_{1}^{2}[(x^2-2x\cdot x^2)+(2x\cdot x^2+(x^2)^2)\cdot 2x]dx=$$

$$=\int\limits_{1}^{2}(x^2-2x^3+4x^4+2x^5)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2}+\frac{4}{5}x^3+\frac{x^6}{3}\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=\frac{1219}{30}=40\frac{19}{30}.$$



172-chizma.

2-misol. $\oint\limits_{l} ydx+2xdy$ integralni hisoblang, bu yerda l kontur tomonlari $2x+3y=\pm6$, $2x-3y=\pm6$ to'g'ri chiziqlarda yotuvchi soat mili harakatiga teskari yo'nalishda aylanib o'tiladigan romb konturi.

Yechish. l kontur — uchlari $A(3;\ 0)$, $B(0;\ 2)$, $C(-3;\ 0)$, $D(0;\ -2)$ nuqtalarda bo'lgan romb (172-chizma).

Kontur tubandagi tenglamalar bilan berilgan kesmalardan tuzilgan:

$$y=-\frac{2}{3}x+2 \text{ — } AB \text{ ning tenglamasi,}$$

$$y=\frac{2}{3}x+2 \text{ — } BC \text{ ning tenglamasi,}$$

$$y=-\frac{2}{3}x-2 \text{ — } CD \text{ ning tenglamasi,}$$

$$y=\frac{2}{3}x-2 \text{ — } DA \text{ ning tenglamasi.}$$

Bularni hisobga olsak, (8) formuladan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\oint\limits_{l} ydx+xdy=\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} ydx+2xdy+\int\limits_{\overset{\smile}{BC}} ydx+2xdy+$$

$$+\int\limits_{\overset{\smile}{CD}} ydx+2xdy+\int\limits_{\overset{\smile}{DA}} ydx+2xdy.$$

Har qaysi integralni ayrim hisoblaymiz:

$$\int_3^0\left[\left(-\frac{2}{3}+2\right)+2x\left(-\frac{2}{3}\right)\right]dx=\int_3^0 2(-x+1)dx=3,$$

$$\int_0^{-3}\left[\left(\frac{2}{3}+2\right)+2x\left(\frac{2}{3}\right)\right]dx=\int_0^{-3}(2x+2)dx=3,$$

$$\int_{-3}^0\left[\left(-\frac{2}{3}-2\right)+2x\left(-\frac{2}{3}\right)\right]dx=\int_{-3}^0(-2x-2)dx=3,$$

$$\int_0^3\left[\left(\frac{2}{3}-2\right)+2x\left(\frac{2}{3}\right)\right]dx=\int_0^3(2x-2)dx=3.$$

Shunday qilib, $\oint ydx+2xdy=12$.

12.3.6. RIMAN – GRIN FORMULASI

xOy tekislikda l egri chiziq bilan chegaralangan D sohani qaraylik. D tekis soha bo'yicha olingan ikki o'lchovli integral bilan l egri chiziq bo'yicha olingan egri chiziqli integral orasidagi bog'lanishni aniqlaymiz. D soha bo'yicha olingan ikki o'lchovli integralni qaraylik:

$$\iint\limits_D \frac{\partial f}{\partial y}dxdy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\frac{\partial f}{\partial y}dy=\int_a^b f(x,y_2(x))dx-\int_a^b f(x,y_1(x))dx. \tag{1}$$

(1) formuladagi integrallar mos ravishda l_1 va l_2 yoylar bo'yicha olingan egri chiziqli integrallarga teng:

$$\left.\begin{aligned}\int_a^b f(x,y_1(x))dx&=\int_{l_1} f(x,y)dx,\\ \int_a^b f(x,y_2(x))dx&=-\int_{l_2} f(x,y)dx.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

(2) ni (1) ga qo'ysak,

$$\iint\limits_D \frac{\partial f}{\partial y}dxdy=-\int_{l_1} f(x,y)dx-\int_{l_2} f(x,y)dx \tag{3}$$

ga ega bo'lamiz. (3) dan esa

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial y} dxdy = -\oint f(x,y)dx. \qquad (4)$$

Endi $\iint_D \frac{\partial g}{\partial x} dxdy$ ni qaraymiz. Bu integralda ham oldingi integralga o'xshash shakl almashtiramiz, u holda

$$\iint_D \frac{\partial g}{\partial x} dxdy = \oint g(x,y)dx. \qquad (5)$$

(4) va (5) tengliklarning chap va o'ng tomonlarini o'zaro qo'shamiz, u holda

$$\iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy = \oint_l gdx + fdy. \qquad (6)$$

(6) formula *Riman—Grin* formulasi deyiladi.

M i s o l. Riman—Grin formulasidan foydalanib, $\oint_l -x^2ydx + xy^2dy$ integralni hisoblang. Bunda l kontur $x^2 + y^2 = R^2$ aylanadan iborat bo'lib, yo'nalish musbat.

Y e c h i s h. Riman—Grin formulasi bo'yicha ikki o'lchovli integralga o'tamiz:

$$g(x,y) = xy^2; \;\; f(x,y) = -x^2y; \;\; \frac{\partial g}{\partial x} = y^2; \;\; \frac{\partial f}{\partial x} = -x^2;$$

$$\oint_l -x^2ydx + x^2ydy = \iint_D (y^2 + x^2)dxdy.$$

Bu yerda ikki o'lchovli integralni hisoblash uchun qutb koordinatalar sistemasiga o'tamiz: $x^2 + y^2 = r^2$; $dxdy = rdrd\varphi$ bo'lgani uchun D soha ushbu tengsizliklar bilan aniqlanadi: $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le r \le R$.

U holda

$$\iint_D (x^2 + y^2)dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2 rdr = \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{r^4}{4}\right]\Bigg|_0^R = \int_0^{2\pi} \frac{R^4}{4} d\varphi = \frac{\pi R^4}{2};$$

Demak,

$$\oint_l -x^2ydx + xy^2dy = \frac{\pi R^4}{2}.$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Koordinatalar bo'yicha egri chiziqli integral deb nimaga aytiladi?
2. Egri chiziqli integralning asosiy xossalarini sanab bering.
3. Egri chiziqli integralni hisoblash usullarini ko'rsating.
4. Riman—Grin formulasini yozing.

13-bob. EHTIMOLLAR NAZARIYASI ELEMENTLARI

13.1. TASODIFIY HODISA (VOQEA). TASODIFIY HODISANING NISBIY CHASTOTASI (TAKRORLANISHI). HODISANING EHTIMOLI

Ehtimollar nazariyasi tasodifiy hodisalarning qonuniyatlarini o'rganuvchi fandir.

Ma'lum shartlar to'plami (majmuasi) bajarilganda ro'y berishi (kelib chiqishi) yoki ro'y bermasligi mumkin bo'lgan har qanday hodisa (voqea) *tasodifiy hodisa* deb ataladi. Shartlar to'plamini har gal amalga oshirilishi *sinov* (yoki *tajriba*) deyiladi.

Masalan, agar tajriba detal tayyorlashdan iborat bo'lsa, detalning standartga mos kelishi hodisadir; agar tajriba tangani tashlashdan iborat bo'lsa, uning gerbli tomoni tushishi hodisadir; agar tajriba o'yin soqqasini (yoqlariga 1 dan 6 gacha raqamlar yozilgan bir jinsli kubik) tashlashdan iborat bo'lsa, u holda to'rtlik tushishi hodisadir.

Hodisalar lotin alifbosining bosh harflari bilan belgilanadi: A, B, C, ...

A hodisaning *nisbiy chastotasi* yoki *chastotasi* deb berilgan hodisaning ro'y berish soni m ning berilgan hodisa har birida ro'y berish yoki ro'y bermasligi mumkin bo'lgan bir xil sharoitda o'tkazilgan tajribalarning umumiy n soniga nisbatiga aytiladi va $P^*(A)$ bilan belgilanadi:

$$P^*(A) = \frac{m}{n}. \qquad (1)$$

Kuzatishlar, tajribalar ko'p marta takrorlanganda tasodifiy hodisaning $P^*(A)$ chastotasi barqaror ekanini ko'rsatadi. Misolda tushuntiramiz. Tanga tashlash bir xil sharoitda 3 seriyada amalga oshirilgan. Birinchi seriya 6(olti)ta tashlashdan iborat bo'lib, unda tanganing gerbli tomoni tushishi 4 marta sodir bo'lgan. Ikkinchi seriya 250 tashlashdan iborat bo'lib, unda gerbli tomoni tushishi 139 marta sodir bo'lgan. Uchinchi seriya 302 tashlashdan iborat bo'lib, unda gerbli tomoni tushish 155 marta sodir bo'lgan. A hodisa tanganing gerbli tomoni tushishi. Seriyalarda tanganing, gerbli tomoni tushishi nisbiy chastotasi quyidagicha bo'ladi:

I seriyada $P^*(A) = 0,66$;

II seriyada $P^*(A) = 0,55$;

III seriyada $P^*(A) = 0,51$.

Bundan ko'rinadiki, seriyalarda tashlash soni qancha katta bo'lsa, tushish chastotasi barqaror bo'lib, 0,5 sonidan kam farq qiladi. Tajribalarning ko'rsatishicha, chastotaning 0,5 sonidan bu chetlanishi sinovlar sonining ortishi bilan kamayadi. Ko'pgina hollarda shunday P son mavjudki, A hodisa ro'y berishining nisbiy chastotasi, juda kam uchraydigan hollardan tashqari, sinovlar soni katta bo'lganda shu P sonidan kam farq qiladi. Bu son hodisaning *ehtimoli* deyiladi.

U hodisa ro'y berishining obyektiv imkonini ifodalaydi. Hodisaning ehtimoli qanchali katta bo'lsa, uning ro'y berishi shunchali mumkin bo'ladi. A hodisaning ehtimolini $P(A)$ bilan belgilaymiz (bu inglizcha *probability* so'zidan olingan bo'lib, bizningcha «ehtimol» degan ma'noni beradi). Tajribalar soni n cheksiz o'sib borganda, A hodisaning nisbiy chastotasi shu hodisaning ro'y berish ehtimoli P ga yaqinlashadi. Yuqoridagi misolda gerbning tushish ehtimoli 0,5 ga teng ekanligi o'z-o'zidan ravshan.

13.1.1. HODISALAR YIG'INDISI, KO'PAYTMASI

A va B hodisalar yig'indisi deb A yoki B hodisalardan bittasi ro'y beradigan $A + B$ hodisaga aytiladi.

A va B hodisalar ko'paytmasi deb A va B hodisalar bir tajribada bir vaqtda yuz beradigan AB hodisaga aytiladi.

M i s o l. Ikkita o'yin soqqasi tashlanadi. Birinchi soqqa tashlanganda 6 sonining chiqishi A hodisa, ikkinchi soqqa tashlanganda 6 sonining chiqishi B hodisa bo'lsin. U holda $A + B$ hodisa ikkita soqqa tashlanganda uning kamida bittasida 6 sonining chiqishini ifodalaydi. AB hodisa esa ikkala soqqada ham 6 sonining chiqish hodisasidir.

13.1.2. MUQARRAR, MUMKIN BO'LMAGAN, TENG EHTIMOLLI, BIRGALIKDA BO'LMAGAN HODISALAR

Tajriba natijasida biror shartlar to'plami bajarilganda albatta ro'y beradigan hodisa *muqarrar hodisa* deyiladi. Muqarrar hodisaning ehtimoli 1 ga teng va u E bilan belgilanadi. Tajriba natijasida shartlar to'plami bajarilganda mutlaqo ro'y bermaydigan hodisa *mumkin bo'lmagan hodisa* deyiladi. Bu hodisaning ehtimoli nolga teng va uni 0 bilan belgilaymiz.

Masalan, tanga tashlanganda u yoki bu tomonining tushishini oldindan to‘la ishonch bilan aytish mumkin emas.

Tajribaning har bir natijasini ifodalovchi hodisa *elementar hodisa* deb ataladi. Elementar hodisalarga ajratish mumkin bo‘lgan hodisa *murakkab hodisa* deyiladi. Agar bir necha hodisalardan istalgan birini tajriba natijasida ro‘y berishi boshqalariga qaraganda kattaroq imkoniyatga ega deyishga asos bo‘lmasa, bunday hodisalar *teng imkoniyatli hodisalar* deyiladi.

Soqqa tashlanganda uning yuqori yog‘ida $l(1 \le l \le 6)$ sonning paydo bo‘lishi tasodifiy hodisasini qaraylik. Soqqamiz simmetrik (bir jinsli) bo‘lgani uchun 1 dan 6 gacha bo‘lgan sonlarning istalgan birining tushishi hodisalarining ro‘y berishi *bir xil imkoniyatli hodisalar* deyiladi.

Tashlash soni n katta bo‘lganda l sonini — 1 dan 6 gacha bo‘lgan sonlarning har birining ham soqqaning yuqori yog‘ida paydo bo‘lishini taqriban $\frac{n}{6}$ holda ko‘rish mumkin. Bu tajriba bilan tasdiqlangan. Nisbiy chastota soni $P^* = \frac{1}{6}$ ga yaqin bo‘ladi. Shuning uchun l sonining, shuningdek, 1 dan 6 gacha har qanday boshqa sonning ham yuqori yoqda paydo bo‘lish ehtimoli $\frac{1}{6}$ ga teng deb hisoblanadi.

Agar A va B hodisalar bir paytda ro‘y berishi mumkin bo‘lmagan hodisalar bo‘lsa, ular *birgalikda bo‘lmagan hodisalar* deyiladi. Masalan, tangani tashlaganda bir vaqtda gerbli va raqamli tomonlarini tushish hodisalari birgalikda bo‘lmagan hodisalardir.

A hodisaga *qarama-qarshi hodisa* deb, A hodisaning ro‘y bermasligidan iborat $\bar{A}$ hodisaga aytiladi. A va $\bar{A}$ hodisalar birgalikda bo‘lmasligi o‘z-o‘zidan ravshan.

Agar tajribada tasodifiy hodisalarning istalgan birining ro‘y berishi mumkin bo‘lib, bu hodisa bilan birgalikda emas biror boshqa hodisaning ro‘y berishi mumkin bo‘lmasa, bu holda tasodifiy *hodisalar to‘liq gruppasini* tashkil qiladi deb aytamiz. Teng imkoniyatli birgalikda bo‘lmagan hodisalarning to‘liq gruppasini qaraylik. Bunday hodisalarni hollar (yoki imkonlar) deb ataymiz. Bunday gruppaning hodisasi, agar uning ro‘y berishi natijasida A hodisaning ro‘y berishi kelib chiqadigan bo‘lsa, A hodisaning ro‘y berishiga *qulaylik tug‘diruvchi hodisalar* deb ataladi.

M i s o l. Qutida 8 ta shar bo‘lib, ularning har biriga bittadan 1 dan 8 gacha bo‘lgan raqam yozilgan. 1, 2, 3, 4 raqamli sharlar qizil, qolgan sharlar esa qora rangda. 1 raqamli sharning paydo bo‘lishi (shuningdek, 2, 3 va 4 raqamli sharning paydo bo‘lishi ham) qizil sharning paydo bo‘lishiga qulaylik tug‘diruvchi hodisadir.

Qaralayotgan hol uchun ehtimolga boshqacha ta'rif berish mumkin.

Ta'rif. A hodisaning *ehtimoli* deb A hodisaga qulaylik tug'diruvchi hollar soni m ning teng imkoniyatli, birgalikda bo'lmagan hodisalar to'liq gruppasini tashkil qiluvchi barcha mumkin bo'lgan hollar soni n ga nisbatiga aytiladi va simvolik ravishda quyidagicha yoziladi:

$$P(A) = P = \frac{m}{n}. \qquad (1)$$

Bu ta'rif ehtimolning klassik ta'rifi deb ham yuritiladi. Ehtimolning ta'rifidan uning ushbu $0 \le P \le 1$ munosabatni qanoatlantirishi kelib chiqadi.

1-misol. Qutida 36 ta olma bo'lib, undan bitta olma olindi. 36 ta olmadan 9 tasi qizil olma. Qizil olmaning olinganligi ehtimolini toping.

Yechish. Agar qulaylik tug'diruvchi hollar soni $m = 9$ bo'lsa, u holda qizil olma chiqish ehtimoli

$$P = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \text{ ga teng.}$$

2-misol. Birinchi to'pdan nishonga tegish ehtimoli $\frac{8}{10}$ ga, ikkinchi to'pdan nishonga tegish ehtimoli esa $\frac{7}{10}$ ga teng. Ikkala to'pdan bir vaqtda o'q uzilganda nishonga tegishi ehtimolini toping. Hech bo'lmaganda bitta o'qning nishonga tegishi nishonning shikastlanganligi hisoblanadi.

Yechish. Ehtimollar nazariyasining ko'pgina masalalarini yechish «Qutilar sxemasi» masalasiga keltiriladi. Shuning uchun qutidan shar olish masalasiga umumlashgan masala deb qaraladi. Berilgan masala ham quyidagicha modellashtiriladi.

Ikki qutida 10 tadan shar bo'lib, ular 1 dan 10 gacha nomerlangan. Birinchi quti ichida 8 ta qizil va ikkita qora shar bo'lib, ikkinchisida esa 7 ta qizil va uchta qora shar bor. Har bir qutidan bittadan shar olinadi. Olingan ikkita shar ichida kamida bittasi qizil shar bo'lishi ehtimoli qanday?

Birinchi qutida har bir shar ikkinchi qutidagi ixtiyoriy shar bilan birga olinishi mumkin bo'lgani uchun barcha hollar soni 100 ta, ya'ni $n = 100$. Qulaylik tug'diruvchi hollarni hisoblaymiz. Ikkinchi qutidagi ixtiyoriy shar bilan birgalikda birinchi qutidagi 8 ta qizil shar ixtiyoriy olinganda, olingan sharlar ichida eng kamida bitta qizil shar bo'ladi. Bunday hollar $10\times 8 = 80$ ta.

Birinchi qutidan ikkita qora sharning har birini ikkinchi qutidagi 7 ta qizil sharning har biri bilan birgalikda olinganda olingan sharlar orasida bitta qizil shar bo'ladi. Bunday imkonlar $2\times7 = 14$ ga teng. Shunday qilib, hammasi bo'lib qulaylik tug'diruvchi hollar $m = 80 + 14 = 94$ ta. Olingan sharlar orasida kamida bitta qizil shar bo'lish ehtimoli

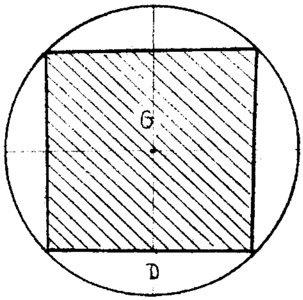
$$P = \frac{m}{n} = \frac{94}{100} \text{ ga teng.}$$

Nishonga tegish ehtimoli ham shunga teng.

13.1.3. HODISA EHTIMOLINING GEOMETRIK TA'RIFI

Faraz qilaylik, tekislikda biror D soha berilgan bo'lsin. D soha boshqa biror G sohani o'z ichiga olgan bo'lsin, ya'ni $G\subset D$.

D sohaga tavakkaliga biror nuqta tashlansin. Bu nuqtaning G sohaga tushish ehtimolini qaraymiz. Bunda barcha elementar hodisalar D sohadan iborat. D — cheksiz to'plam. Bunda biz klassik ta'rifdan foydalanamiz. D sohaga tashlangan nuqta sohaning istalgan qismiga tushishi mumkin. Bu nuqtaning G sohaga tushish ehtimoli G sohaning o'chamiga (uzunligi, hajmi) proporsional bo'lib, G ning shakliga, uning D sohaning qayerida joylashishiga bog'liq bo'lmasin. Soha o'lchamini mes orqali belgilasak, tavakkaliga tashlangan nuqtaning G sohaga tushish ehtimoli



173-chizma.

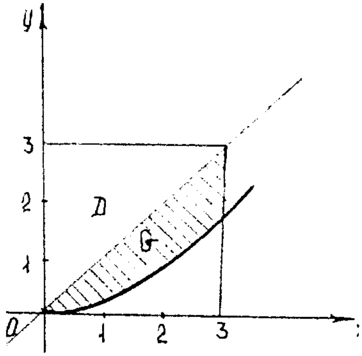
$$P = \frac{\text{mes}\,G}{\text{mes}\,D} \text{ ga teng bo'ladi.}$$

1-misol. R radiusli doiraga nuqta tavakkaliga tashlangan. Tashlangan A nuqtaning doiraga ichki chizilgan kvadrat ichiga tushish ehtimolini toping.

Yechish. $S(G)$ — kvadratning yuzi, $S'(D)$ — doiraning yuzi bo'lsin (173-chizma). A — nuqtaning kvadratga tushishi hodisasi. U holda

$$P(A) = \frac{S(G)}{S'(D)} = \frac{2R^2}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi} = 0,636; \qquad P(A) = 0,636.$$

2-misol. $[0;\ 3]$ kesmada tavakkaliga ikkita x va y sonlar tanlangan. Bu sonlar $x^2 \le 6y \le 6x$ tengsizlikni qanoatlantirishi ehtimolini toping.



174-chizma.

Y e c h i s h. $(x;\ y)$ nuqtaning koordinatalari

$$\begin{cases} 0 \le x \le 3, \\ 0 \le y \le 3 \end{cases}$$

tengsizliklar sistemasini qanoatlantiradi. Bu — $(x;\ y)$ nuqta tomoni 3 ga teng kvadrat nuqtalari to'plamidan tavakkaliga tanlanishini bildiradi.

Bizni qiziqtirayotgan A hodisa tanlanadigan $(x;\ y)$ nuqta shtrixlangan shaklga tegishli bo'lgan holda ro'y beradi (174-chizma).

Bu shakl koordinatalari $x^2 \le 6y \le 6x$ tengsizlikni qanoatlantiradigan nuqtalarning to'plamidan iborat. Izlanayotgan ehtimol shtrixlangan shakl yuzining kvadrat yuziga nisbatiga teng, ya'ni

$$P(A) = \frac{\int_0^3 \left(x - \frac{1}{6}x^2\right)dx}{9} = \frac{\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3}{9} = \frac{\frac{9}{2} - \frac{27}{18}}{9} = \frac{\frac{54}{18}}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

13.1.4. KOMBINATORIKA ELEMENTLARI

Ehtimollarni bevosita hisoblashda ko'pincha kombinatorika formulalaridan foydalaniladi.

O'rin almashtirish deb n ta turli elementlarning bir-biridan faqat joylashishi bilan farq qiluvchi kombinatsiyalariga aytiladi. n ta turli elementlarning o'rin almashtirishlar soni $P_n = n!$ ga teng ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$).

O'rinlashtirishlar n ta turli elementdan m tadan tuzilgan kombinatsiyalar bo'lib, ular bir-biridan elementlarning tarkibi yo ularning tartibi bilan farq qiladi. Ularning soni

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \text{ yoki } A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$$

formulalar bilan topiladi.

Gruppalashlar bir-biridan hech bo'lmaganda, bitta elementi bilan farq qiluvchi n ta elementdan m tadan tuzilgan kombinatsiyalardir. Ularning soni

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \text{ ga teng.}$$

1-misol. Guruhda 14 talaba bo'lib, ularning 8 nafari a'lochilar. Ro'yxat bo'yicha tavakkaliga 10 talaba tanlab olindi. Tanlab olinganlar ichida 6 talaba a'lochi bo'lishi ehtimolini toping.

Yechish. Sinovning barcha mumkin bo'lgan teng imkoniyatli elementar hodisalari soni C_{14}^{10} ga teng. Bularning ichidan $C_8^6 \cdot C_6^4$ tasi tanlab olingan talabalar ichidan 6 tasi a'lochi talabalar hodisasi (A) uchun qulaylik tug'diradi. Shuning uchun:

$$P(A) = \frac{C_8^6 \cdot C_6^4}{C_{14}^{10}} = \frac{\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2}}{\frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}} = \frac{4 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5}{7 \cdot 13 \cdot 11} = \frac{60}{143}.$$

2-misol. Kirill alifbosining 9 ta harfidan «филология» so'zi tuzilgan. Bu harflar tasodifan sochilib ketgan va qayta ixtiyoriy tartibda yig'ilgan. Yana «филология» so'zi hosil bo'lishi ehtimolini toping.

Yechish. A — «филология» so'zi hosil bo'lishi hodisasi. Teng imkoniyatli mumkin bo'lgan elementar hodisalar soni $n = 9!$ ta bo'lib, A hodisaga qulaylik yaratuvchilari $m = 2! \cdot 2! \cdot 2!$ ta bo'ladi. Bu yerda «филология» so'zida «и» 2 marta, «о» 2 marta, «л» 2 marta takrorlanishi hisobga olinadi. Demak,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2! \cdot 2! \cdot 2!}{9!} = \frac{1}{45360}.$$

3-misol. Telefonda nomer terayotgan abonent oxirgi uchta raqamni esdan chiqarib qo'ydi va faqat bu raqamlar har xil ekanligini eslab qolgan holda, ularni tavakkaliga terdi. Kerakli raqamlar terilganligi ehtimolini toping.

Yechish. A — uchta kerakli raqam terilganlik hodisasi bo'lsin. Hammasi bo'lib, 10 ta raqamdan 3 tadan nechta o'rinlashtirishlar tuzish mumkin bo'lsa, shuncha, ya'ni $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ ta turli raqamni terish mumkin. Shuning uchun klassik ehtimol ta'rifiga ko'ra:

$$P(A) = \frac{1}{A_{10}^3} = \frac{1}{720}.$$

13.1.5. EHTIMOLLARNI QO'SHISH TEOREMASI

Ta'rif. A va B hodisalar *yig'indisi* deb bu hodisalardan kamida bittasining ro'y berishidan iborat bo'lgan C hodisaga aytiladi. Biz birgalikda bo'lmagan A va B hodisalar yig'indisining ehtimolini qaraymiz. $P(A)$ va $P(B)$ mos ravishda ularning ehtimollari bo'lsin.

1-teorema. *Ikkita birgalikda bo'lmagan A va B hodisalar yig'indisining ehtimoli shu hodisalar ehtimollarining yig'indisiga teng:*

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Isbot. Hodisa ehtimolining klassik ta'rifiga ko'ra, aytaylik, tajribalar natijasi n ta elementar hodisalar bo'lib, bulardan m_1 tasi A hodisaga, m_2 tasi esa B hodisa ro'y berishiga qulaylik tug'dirsin. U holda

$$P(A) = \frac{m_1}{n}; \quad P(B) = \frac{m_2}{n} \tag{1}$$

bo'ladi.

Teorema shartiga ko'ra A va B hodisalar birgalikda emas. Shunga ko'ra yo A hodisa, yoki B hodisa ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi hodisalar soni $m_1 + m_2$ ga teng.

Demak, $A + B$ hodisaning ehtimoli $P(A+B) = \frac{m_1+m_2}{n}$ bo'ladi.

Agar $P(A+B) = \frac{m_1+m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n}$ bo'lsa, u holda (1) ga asosan tubandagiga ega bo'lamiz:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Natija. *A hodisaga qarama-qarshi $\overline{A}$ hodisaning ehtimoli $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ ga teng.*

Isbot. A va $\overline{A}$ hodisalar qarama-qarshi bo'lganligidan:

$$P(A + \overline{A}) = 1. \tag{2}$$

Yuqoridagi birgalikda bo'lmagan hodisalar uchun ehtimollarni qo'shish teoremasiga asosan

$$P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}). \tag{3}$$

$$(2),\ (3) \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Misol. Qutida 25 ta shar bor. Ulardan 8 tasi qizil, 6 tasi oq, 11 tasi sariq. Tavakkaliga olingan sharning rangli shar bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. Rangli shar chiqishi deganda yo qizil shar, yoki sariq shar chiqishini tushunamiz. Qizil shar chiqish hodisasini A, sariq shar chiqish hodisasini B bilan belgilaylik. U holda ehtimolning klassik ta'rifiga asosan: $P(A) = \frac{8}{25}$; $P(B) = \frac{11}{25}$ bo'ladi. $A + B$ hodisa rangli shar chiqishi hodisasi. A va B hodisalar birgalikda emas, shuning uchun 1-teoremaga ko'ra: $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Demak, izlangan ehtimol: $P(A+B)=\frac{8}{25}+\frac{11}{25}=\frac{19}{25}$.

2-teorema. *Ehtimollarni qo'shish teoremasi juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan A_1, A_2, ..., A_n hodisalar uchun ham o'rinli, ya'ni*

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n).$$

Agar A_1, A_2, ..., A_n hodisalar hodisalarning to'la gruppasini tashkil qilsa, u holda $P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1$ bo'ladi.

Endi birgalikda bo'lgan hodisalar (ikkita hodisadan birining ro'y berishi ikkinchisining ro'y berishini inkor etmaydigan hodisalar) uchun qo'shish teoremasini qaraymiz.

3-teorema. *Ikkita birgalikda bo'lgan A va B hodisadan hech bo'lmaganda birining ro'y berish ehtimoli hodisalar ehtimollari yig'indisidan ularning birgalikda ro'y berish hodisasi ehtimolining ayirmasiga teng bo'ladi: $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.*

Bu teorema ikkitadan ortiq hodisalar uchun ham o'rinli. Teoremani 175-chizmadagi sxemaga asosan isbotini keltiramiz.

I s b o t. Aytaylik, sxemadagi hodisalar sodir bo'lsin, bunda: n — tajriba natijasida hodisalar umumiy hollar soni; m — A hodisaning kelib chiqishiga qulaylik tug'diruvchi hollar soni; r — B hodisani kelib chiqishiga qulaylik tug'diruvchi hollar soni; s — A va B hodisalarning bir vaqtda ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi hollar soni yoki AB hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi hollar soni.

$A+B$ hodisa A hodisaga qulaylik tug'diruvchi m hollarning birida yoki B hodisaga qulaylik tug'diruvchi r hollarning birida sodir bo'ladi. Shuningdek, m va r hollarning ichida umumiy bo'lgan s hollar borki, u $m+r-s$ bo'lib, $A+B$ hodisa sodir bo'lishiga qulaylik tug'diradi.

Bu holda ehtimolning klassik ta'rifiga asosan tubandagiga ega bo'lamiz:

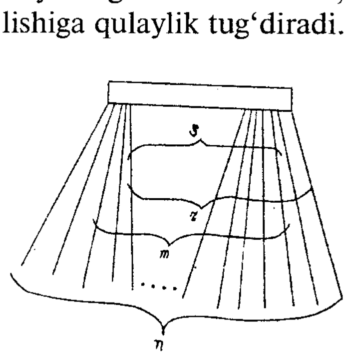
$$P(A+B)=\frac{m+r-s}{n}=\frac{m}{n}+\frac{r}{n}-\frac{s}{n}.$$

$$\frac{m}{n}=P(A),\quad \frac{r}{n}=P(B)\ \text{va}\ \frac{s}{n}=P(AB)$$

bo'lganligidan

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

bo'ladi.



175-chizma.

M i s o l. Ikki mergan bittadan o'q uzdi. Birinchi merganning nishonga tekkizish (A hodisa) ehtimoli 0,8 ga, ikkinchisiniki (B hodisa) 0,9 ga teng bo'lsa, merganlardan aqalli bittasining nishonga tekkizganligi ehtimolini toping.

Y e c h i s h. Masala shartiga asosan: $P(A) = 0{,}8$, $P(B) = 0{,}9$. Birgalikda bo'lgan hodisalar uchun ehtimollarni qo'shish teoremasiga asosan:

$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = 0{,}8 + 0{,}9 - 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 1{,}7 - 0{,}72 = 0{,}98.$

13.1.6. ERKLI HODISALAR EHTIMOLLARINI KO'PAYTIRISH TEOREMASI

Agar ikkita A va B hodisalardan birining ro'y berishi ikkinchisining ehtimolini o'zgartirmasa, boshqacha aytganda, ikkinchisining ro'y berish yoki bermasligiga bog'liq bo'lmasa, u holda bu hodisalar *erkli hodisalar* deyiladi. Bu mavzuda faqatgina birgalikda bo'lgan hodisalar haqida fikr yuritiladi, chunki birgalikda bo'lmagan hodisalarning birgalikda ro'y berish (ko'paytmasining) ehtimoli nolga teng.

A va B hodisalar erkli hodisalar bo'lib, ularning mos ehtimollari $P(A)$ va $P(B)$ bo'lsin.

Teorema. *Ikkita erkli A va B hodisaning birgalikda ro'y berish ehtimoli shu hodisalarning ehtimollari ko'paytmasiga teng:*

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \qquad (*)$$

I s b o t. Teorema shartiga ko'ra A va B — erkli hodisalar. Shu sababli, har bir hodisaning sodir bo'lishida alohida tajribalar o'tkazilgan bo'lsin. Tajriba natijasida n ta elementar hodisaga ega bo'laylik. Bulardan n_1 tasi A hodisaga qulaylik tug'dirsin.

Tajriba natijasida m ta elementar hodisaga ega bo'laylik. Bulardan m_1 tasi B hodisaga qulaylik tug'dirsin. U holda

$$P(A) = \frac{n_1}{n}, \quad P(B) = \frac{m_1}{m}. \qquad (1)$$

Tajriba natijasida ro'y beradigan barcha elementar hodisalar soni nm ta bo'ladi. Bulardan $n_1 m_1$ tasi A va B hodisalarning birgalikda ro'y berishiga qulaylik tug'diradi.

Demak,

$$P(AB) = \frac{n_1 m_1}{nm}. \qquad (2)$$

$$(1),\ (2) \Rightarrow P(A \cdot B) = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{m_1}{m} = P(A) \cdot P(B) \quad (3)$$

bo'ladi. Teorema isbot qilindi.

Bu teorema erkli hodisalar soni n ta bo'lganda ham to'g'ri. Aytaylik, $A_1, A_2, ..., A_n$ birgalikda bog'liq bo'lmagan hodisalar bo'lsin. U holda (3) ga asosan:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n). \quad (4)$$

1-m i s o l. Ikki qutining har birida 20 tadan detal bor. Birinchi qutida 16 ta, ikkinchi qutida 15 ta standart detal bor. Har bir qutidan tavakkaliga bittadan detal olinadi. Olingan detalning standart bo'lish ehtimolini toping.

Y e c h i s h. Birinchi qutidan olingan detal standart bo'lish hodisasini A, ikkinchi qutidan olingani detal standart bo'lish hodisasini B deylik. U holda $P(A) = \frac{16}{20} = 0{,}8$; $P(B) = \frac{15}{20} = 0{,}75$ bo'ladi.

Olingan ikkala detalning standart bo'lish hodisasi esa AB hodisa bo'ladi.

A, B birgalikda bo'lmagan hodisalardir. Shuning uchun (*)ga asosan: $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}75 = 0{,}6$.

2-m i s o l. Tangani o'n marta tashlaganda gerbli tomon 10 marta tushish ehtimoli qancha?

Y e c h i s h. A_i hodisa i-tashlashda gerbli tomon tushishi bo'lsin. Izlanayotgan ehtimol barcha $A_i (i = 1, 2, 3, ..., 10)$ hodisalar ko'paytmasining ehtimolidir. A_i hodisalar esa birgalikda erkli bo'lgani uchun, (4) formulani qo'llab, quyidagiga egamiz:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_{10}) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_{10}).$$

Biroq istalgan i uchun $P(A_i) = 1/2$, shu sababli

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_{10}) = (1/2)^{10} = 1/1024 \approx 0{,}001.$$

3-m i s o l. Ishchi bir-biriga bog'liq bo'lmagan holda ishlaydigan uchta stanokni boshqaradi. Bir soat mobaynida ishchining stanokka qarashi kerak bo'lmaslik ehtimoli birinchi stanok uchun 0,7 ga, ikkinchi stanok uchun 0,9 ga, uchinchi stanok uchun esa 0,8 ga teng:

1) bir soat mobaynida uchta stanokdan hech qaysisiga ishchining e'tibori kerak bo'lmasligi ehtimoli P ni toping;

2) bir soat mobaynida kamida bitta stanokka ishchining e'tibori zarur bo'lmaslik ehtimolini toping.

Yechish. 1) izlanayotgan ehtimolni (4) formula bo'yicha topamiz:

$$P = 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,7 = 0,504;$$

2) bir soat mobaynida uchala stanokka ishchining e'tibor berishi zarur bo'lish ehtimoli birinchi stanok uchun $1 - 0,7 = 0,3$ ga, ikkinchi va uchinchi stanoklar uchun u, mos ravishda, $1 - 0,9 = 0,1$ va $1 - 0,8 = 0,2$ ga teng. U holda bir soat mobaynida uchala stanokka ishchining e'tibor berishi zarur bo'lish ehtimoli (4) formulaga asosan: $0,3 \cdot 0,1 \cdot 0,2 = 0,006$.

Bir soat mobaynida uchala stanokka ishchining e'tibor berishi zarur bo'lishidan iborat A hodisa kamida bitta stanokka ishchining e'tibor berishi zarur bo'lmasligidan iborat hodisa $\overline{A}$ ga qarama-qarshidir. Shuning uchun $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ formulaga ko'ra topamiz:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,006 = 0,994.$$

13.1.7. SHARTLI EHTIMOL

Ayrim masalalarni yechishda A va B hodisalarning ehtimollari ma'lum bo'lsa, bu hodisalar ko'paytmasining ehtimolini topishga to'g'ri keladi. Quyidagi misolni qaraymiz. Ikkita tanga tashlangan bo'lsin. Ikkita gerb tushish ehtimolini topish talab qilinadi.

Biz to'liq gruppa tashkil etuvchi 4 ta teng ehtimolli juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan ushbu natijalarga egamiz:

	1-tanga	2-tanga
1-natija	gerb	gerb
2-natija	gerb	raqam
3-natija	raqam	gerb
4-natija	raqam	raqam

Shunday qilib, P(gerb, gerb) = 1/4. Endi birinchi tangada gerb tushgani ma'lum deb faraz qilaylik. Shundan so'ng gerb ikkala tangada tushish ehtimoli qanday o'zgaradi?

Birinchi tangada gerb tushgani uchun, endi to'liq gruppa ikkita teng ehtimolli birgalikda bo'lmagan natijalardan iborat bo'ladi:

	1-tanga	2-tanga
1-natija	gerb	gerb
2-natija	gerb	raqam

Bunda natijalardan faqat bittasi (gerb, gerb) hodisaga imkon yaratadi. Shuning uchun qilingan farazlarda P(gerb, gerb) = 1/2.

Endi A orqali ikkita gerbning tushishini, B orqali esa gerbning birinchi tangada tushishini belgilaymiz.

B hodisa ro'y berganligi ma'lum bo'lganda, A hodisa ehtimoli o'zgarishini ko'ryapmiz.

A hodisaning B hodisa ro'y berdi, degan shart ostidagi yangi ehtimolini $P_B(A)$ orqali belgilaymiz. Shunday qilib,

$$P(A) = \frac{1}{4}, \qquad P_B(A) = \frac{1}{2}.$$

A hodisaning B hodisa ro'y beradi, degan shart ostidagi ehtimoli A hodisaning *shartli ehtimoli* deyiladi.

Endi bog'liq hodisalar ehtimollarining ko'paytmasini ko'rib o'tamiz.

13.1.8. EHTIMOLLARNI KO'PAYTIRISH TEOREMASI

Teorema. *A va B hodisalar ko'paytmasining ehtimoli ulardan biri ehtimolining ikkinchisining birinchi hodisa ro'y berdi, deb hisoblangan shartli ehtimoliga ko'paytmasiga teng, ya'ni*

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B). \tag{5}$$

Isbot. Bu munosabatning to'g'riligini ehtimolning klassik ta'rifiga asoslanib isbotlaymiz. Tajribalarning mumkin bo'lgan $E_1, E_2, ..., E_N$ natijalari teng ehtimolli, juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan hodisalarning to'liq gruppasini tashkil qilsin va ulardan A hodisaga K ta natija qulaylik yaratsin hamda ana shu K ta natijadan L tasi B hodisaga qulaylik yaratsin. U holda, A va B hodisalarning ko'paytmasiga tajribalarning mumkin bo'lgan K ta natijasidan L tasi qulaylik tug'diradi.

Bundan esa quyidagiga egamiz:

$$P(A) = \frac{K}{N}; \qquad P(AB) = \frac{L}{N}; \qquad P_A(B) = \frac{L}{K}.$$

Shunday qilib,

$$P(AB) = \frac{L}{N} = \frac{K}{N} \cdot \frac{L}{N} = P(A) \cdot P_A(B).$$

Shunga o'xshash, A va B ning o'rinlarini almashtirib, quyidagi munosabatga ega bo'lamiz:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B). \tag{6}$$

(5) va (6) munosabatlardan

$$P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A) \tag{7}$$

kelib chiqadi.

Ehtimollarni ko'paytirish teoremasi istalgan chekli sondagi hodisalar uchun umumlashtiriladi. Masalan, uchta A_1, A_2, A_3 hodisa uchun quyidagiga ega bo'lamiz:

$$P(A_1A_2A_3) = P[(A_1A_2)A_3] = P(A_1A_2) \cdot P_{A_1A_2}(A_3) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3).$$

Umumiy holda:

$$P(A_1A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1A_2}(A_3) \cdot \dots \cdot P_{A_1A_2 \dots A_{n-1}}(A_n). \tag{8}$$

Misol. 4 ta oq va 9 ta qora shar bo'lgan qutidan ikkita shar olinadi. Olingan ikkala shar oq bo'lish ehtimoli qancha?

Yechish. Bu masalani (6) formulani qo'llab yechamiz. Ikkita sharni olish ularni ketma-ket olishga teng kuchlidir. Ikkita oq shar chiqishidan iborat hodisa A va B hodisalarning ko'paytmasidan iborat bo'ladi. (6) formulaga ko'ra quyidagiga ega bo'lamiz:

$P(AB) = P(A)P_A(B)$. Biroq, birinchi oq shar chiqqandan so'ng qutida uchtasi oq bo'lgan 12 ta shar qolgani uchun: $P(A) = \frac{3}{10}$, $P_A(B) = \frac{3}{12}$. Demak, $P(AB) = \left(\frac{3}{10}\right) \cdot \left(\frac{3}{12}\right) = \frac{3}{40}$.

13.1.9. TO'LIQ EHTIMOL FORMULASI

Aytaylik, A hodisa to'liq gruppa tashkil etuvchi n ta juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan H_1, H_2, ..., H_n hodisalarning bittasi va faqat bittasi bilan birgalikda ro'y berishi mumkin bo'lsin. U holda, agar A hodisa ro'y bergan bo'lsa, bu juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan AH_1, AH_2, ..., AH_n hodisalarning birortasi ro'y berganini bildiradi. Demak,

$$A = AH_1 + AH_2 + \dots + AH_n .$$

U holda, ehtimollarni qo'shish teoremasiga asosan, tubandagiga ega bo'lamiz:

$$P(A) = P(AH_1 + AH_2 + \dots + AH_n) = P(AH_1) + P(AH_2) + \dots + P(AH_n).$$

Biroq, $P(AH_i) = P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)\,(i = 1, 2, \dots, n)$, shuning uchun

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + \ldots + P(H_n)P_{H_n}(A). \quad (1)$$

Bu formula to'liq ehtimol formulasi deyiladi. H_1, H_2, ..., H_n hodisalar ko'pincha «gipotezalar» deyiladi. Bu formuladan murakkab hodisalarning ehtimollarini hisoblashda foydalaniladi.

M i s o l. Omborga 360 ta mahsulot keltirildi. Bulardan 300 tasi bir korxonada tayyorlangan bo'lib, 250 tasi yaroqli mahsulot; 40 tasi ikkinchi korxonada tayyorlangan bo'lib, 30 tasi yaroqli mahsulot; 20 tasi uchinchi korxonada tayyorlangan bo'lib, 10 tasi yaroqli mahsulot.

Ombordan tavakkaliga olingan mahsulotning yaroqli bo'lish ehtimolini toping.

Y e c h i s h. Tavakkaliga olingan mahsulot uchun quyidagi gipotezalar o'rinli bo'ladi:

H_1 — mahsulotning 1-korxonada tayyorlangan bo'lishi;
H_2 — mahsulotning 2-korxonada tayyorlangan bo'lishi;
H_3 — mahsulotning 3-korxonada tayyorlangan bo'lishi.

Ularning ehtimollari mos ravishda quyidagicha bo'ladi:

$$P(H_1) = \frac{300}{360} = \frac{5}{6}; \qquad P(H_2) = \frac{40}{360} = \frac{1}{9}; \qquad P(H_3) = \frac{20}{360} = \frac{1}{18}.$$

Agar olingan mahsulotning yaroqli bo'lishini A hodisa deb belgilasak, u holda bu hodisaning turli gipotezalar shartlari ostidagi ehtimollari quyidagicha bo'ladi:

$$P_{H_1}(A) = \frac{5}{6}; \qquad P_{H_2}(A) = \frac{3}{4}; \qquad P_{H_3}(A) = \frac{1}{2}.$$

Yuqorida topilganlarni to'liq ehtimol formulasiga qo'yamiz:

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + \ldots + P(H_n)P_{H_n}(A) =$$
$$= \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{2} = \frac{29}{36}.$$

13.1.10. BAYES FORMULASI

Biror tajriba o'tkazilmoqda va uning o'tish shartlari to'g'risida to'liq gruppa tashkil etuvchi juft-juft bo'lib birgalikda bo'lmagan n ta H_1, H_2, ..., H_n gipotezalarni aytish mumkin bo'lsin.

Gipotezalarning ehtimoli $P(H_i)$ ga teng. Tajriba natijasida A hodisa ro'y berishi ham, ro'y bermasligi ham mumkin bo'lsin, shuning bilan birga, agar tajriba gipoteza bajarilganda o'tayotgan bo'lsa,

$$P_{H_i}(A) = P_i \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

ekani ma'lum bo'lsin.

U holda, agar A hodisa ro'y berganligi ma'lum bo'lib qolsa, gipotezalarning ehtimollari qanday o'zgaradi, degan savol paydo bo'lishi mumkin. Boshqacha aytganda, bizni $P_A(H_i)$ ehtimollarning qiymatlari qiziqtiradi.

(13.1.8) dagi (5) va (6) munosabatlar asosida quyidagiga egamiz:

$$P(H_iA) = P_A(H_i) \cdot P(A) = P_{H_i}(A) \cdot P(H_i) \qquad (i = 1, 2, ..., n),$$

bu yerdan

$$P_A(H_i) = \frac{P_{H_i}(A) \cdot P(H_i)}{P(A)}.$$

Biroq, to'liq ehtimol formulasiga ko'ra:

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + ... +$$

$$+P(H_n)P_{H_n}(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k) \cdot P_k,$$

shuning uchun

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i)P_i}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(H_k)P_k} \quad (i = 1, 2, ..., n). \tag{1}$$

(1) formula *Bayes formulasi* deyiladi.

M i s o l. Omborxonaga 1600 dona tranzistor keltirildi. Ularning 300 tasi birinchi zavodda, 560 tasi ikkinchi zavodda, 740 tasi uchinchi zavodda tayyorlangan. Tranzistorlarning yaroqsiz bo'lib chiqishi 1-zavod uchun 0,03 ga, 2-zavod uchun 0,02 ga va 3-zavod uchun 0,01 ga teng. Tavakkaliga olingan tranzistor yaroqsiz bo'lib chiqdi. Uning 1-zavodda tayyorlanganlik ehtimoli qancha?

Y e c h i s h. Tavakkaliga olingan tranzistor yaroqsiz bo'lib chiqish hodisasi A bo'lsin. H_1, H_2, H_3 esa tranzistor mos ravishda 1, 2, 3-zavodda tayyorlangan, degan gipotezalar bo'lsin. Bu gipotezalarning ehtimollari tubandagicha:

$$P(H_1) = \frac{300}{1600} = 0,19; \qquad P(H_2) = \frac{560}{1600} = 0,35;$$

$$P(H_3) = \frac{740}{1600} = 0,46.$$

Masala shartidan quyidagilar kelib chiqadi:

$$P_1 = P_{H_1}(A) = 0,03; \qquad P_2 = P_{H_2}(A) = 0,02; \qquad P_3 = P_{H_3}(A) = 0,01.$$

$P_A(H_1)$ ni, ya'ni yaroqsiz tranzistorning 1-zavodda tayyorlanganlik ehtimolini topamiz. Bayes formulasiga ko'ra quyidagiga egamiz:

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1)\cdot P_1}{P(H_1)\cdot P_1 + P(H_2)\cdot P_2 + P(H_3)\cdot P_3} =$$

$$= \frac{0,19\cdot 0,03}{0,19\cdot 0,03 + 0,35\cdot 0,02 + 0,46\cdot 0,01} \approx 0,329.$$

Shunday qilib, tranzistor 1-zavodda tayyorlangan, degan gipotezaning ehtimoli u yaroqsiz ekanligi ma'lum bo'lib qolganidan keyin o'zgartiriladi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Ehtimol nima?
2. Hodisa ehtimolining klassik ta'rifini keltiring.
3. Muqarrar, mumkin bo'lmagan, teng ehtimolli hodisalar deganda nimani tushunasiz?
4. Hodisalar yig'indisi va ko'paytmasi ta'rifini keltiring.
5. Birgalikda va birgalikda bo'lmagan hodisalarni misollar yordamida tushuntiring.
6. A hodisaga qarama-qarshi hodisa deganda nimani tushunasiz?
7. Hodisa ehtimolining geometrik ta'rifini misollar yordamida tushuntirib bering.
8. O'rin almashtirish, o'rinlashtirish, gruppalashlarni misollar yordamida tushuntiring.
9. Tasodifiy hodisa nima? Tasodifiy hodisaning nisbiy chastotasini ta'riflang va formulasini keltiring.
10. Ikkita birgalikda bo'lgan hodisalar ehtimollarini qo'shish teoremasini aytib, isbotlab bering.
11. Ikkita birgalikda bo'lmagan hodisalar ehtimollarini qo'shish teoremasini aytib, isbotlab bering.
12. Erkli hodisalar ehtimollarini ko'paytirish teoremasini ta'riflang va isbotlab bering.
13. Hodisaning shartli ehtimolini misollar yordamida tushuntiring.
14. Bog'liq hodisalar ehtimollarini ko'paytirish teoremasini ta'riflang va isbotlab bering.
15. To'liq ehtimol formulasini keltirib, misollar bilan tushuntiring.
16. Bayes formulasini yozib, misollar bilan tushuntiring.

ADABIYOTLAR

1. *Т. Азларов, Х. Мансуров.* Математик анализ. II қисм, Т., «Ўқитувчи», 1989.
2. *Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков.* Лекции по математическому анализу. М., «Высшая школа», 2000.
3. *И. И. Баврин, В. Л. Матросов.* Краткий курс теории вероятностей и математическая статистика. М., «Прометей», 1989.
4. *В. Е. Гмурман.* Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика. Т., «Ўқитувчи», 1977.
5. *В. Е. Гмурман.* Эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадан масалалар ечиш учун қўлланма. Т., «Ўқитувчи», 1980.
6. Дмитрий Письменный. Конспект лекций по высшей математике, I, II часть, М. Айрис Пресс Рольф, М., 2000.
7. *Т. Жўраев, А. Саъдуллаев, Г. Худойберганов, Х. Мансуров, А. Ворисов.* Олий математика асослари. I қисм, Т., «Ўзбекистон», 1995.
8. *Т. Жўраев, А. Саъдуллаев, Г. Худойберганов, Х. Мансуров, А. Ворисов.* Олий математика асослари. II қисм, Т., «Ўзбекистон», 1998.
9. *И. А. Зайцев.* Высшая математика. М., «Высшая школа», 1991.
10. *В. А. Ильин, Э. Г. Позняк.* Аналитическая геометрия. М., «Наука», 1999.
11. *Л. Д. Кудрявцев.* Краткий курс математического анализа. I, II том, М., Издательство Alfa, 1988.
12. *Г. Луканкин, Мартынов, Г. А. Шадрин.* Курс высшей математики. М., «Просвещение», 1988.
13. *Х. Латипов, Ш. Тожиев, Р. Рустамов.* Аналитик геометрия ва чизиқли алгебра. Т., «Ўқитувчи», 1995.
14. *В. П. Минорский.* Математикадан масалалар тўплами. Т., «Ўқитувчи», 1988.
15. *В. Т. Петрова.* Лекции по алгебре и геометрии, I, II часть, М., Владос, 1999.
16. *Н. С. Пискунов.* Дифференциал ва интеграл ҳисоб. I, II том, Т., «Ўқитувчи», 1979.
17. *Р. Н. Назаров, Б. Т. Тошпўлатов.* Алгебра ва сонлар назарияси. Т., «Ўқитувчи», 1990.
18. *Ф. Р. Ражабов, А. Н. Нурметов.* Аналитик геометрия ва чизиқли алгебра. Т., «Ўқитувчи», 1990.
19. *Е. У. Соатов.* Олий математика. Т., «Ўқитувчи», 1992.
20. Под редакцией Г. Н. Яковлева. Высшая математика. М., «Просвещение», 1989.
21. *В. Е. Шнейдер, А. И. Слуцкий, А. С. Шумов.* Олий математика қисқа курси, 2-жилд, Т., «Ўқитувчи», 1987.

MUNDARIJA

F. Rajabov, S. Masharipova, R. Madrahimov

OLIY MATEMATIKA

Universitetlar va pedagogika institutlari talabalari uchun o'quv qo'llanma

Muharrir *X. Alimov*
Badiiy muharrir *J. Gurova*
Texnik muharrir *T. Smirnova*
Musahhih *S. Abdusamatova*
Kompyuterda tayyorlovchi *A. Yuldasheva*

Bosishga 25.01.07 y. da ruxsat etildi. Bichimi $60\times90^1/_{16}$. «Tayms» garniturasida ofset bosma usulida bosildi. Shartli b.t. 25,0. Nashr.t. 25,5. Adadi 2000. 13-raqamli buyurtma.

«ARNAPRINT» MCHJ da sahifalanib, chop etildi.
Toshkent, H. Boyqaro ko'chasi, 41.